



# Construction de déformations isomonodromiques par revêtements

Karamoko Diarra

## ► To cite this version:

Karamoko Diarra. Construction de déformations isomonodromiques par revêtements. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Rennes 1, 2011. Français. NNT : . tel-00746795

**HAL Id: tel-00746795**

**<https://theses.hal.science/tel-00746795>**

Submitted on 29 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et Applications*

**Ecole doctorale matisse**

présentée par

**Karamoko DIARRA**

préparée à l'unité de recherche 6525 CNRS - IRMAR  
Institut de Recherches de Mathématiques de Rennes  
U.F.R. de Mathématiques

**Construction  
de Déformations  
isomonodromiques  
par revêtements**

**Thèse soutenue à Rennes :**

**le 15 Décembre 2011**

devant le jury composé de :

**Marcel NICOLAU**

Professeur, Universitat Autònoma de Barcelona (Espagne) / rapporteur

**Emmanuel PAUL**

Professeur, Université Paul Sabatier de Toulouse (France) / rapporteur

**Dominique CERVEAU**

Professeur, Université de Rennes 1 (France) / examinateur

**Ouaténi DIALLO**

Professeur, Université de Bamako (Mali)  
examineur

**Gaoussou TRAORÉ**

Professeur, Université de Bamako (Mali)  
examineur

**Frank LORAY**

Chercheur, Université de Rennes 1 (France)  
directeur de thèse

**Moustapha SOUMARÉ**

Professeur, Université de Bamako (Mali)  
co-directeur de thèse







# Remerciement

Il serait très malhonnête de commencer cette thèse sans remercier chaleureusement Frank LORAY mon directeur de thèse ; sans ses encouragements, ses critiques tranchantes, son aide compétente et sa remarquable patience ce travail n'aurait pas été possible. Il m'a orienté sur la route passionnante des déformations isomonodromiques, quel beau domaine de recherches. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Moustapha SOUMARÉ qui a accepté, avec beaucoup de disponibilité, d'écoute et de conseil, de co-diriger mes premiers pas dans le monde à la recherche.

J'exprime mes profonds remerciements aux Professeurs Marcel NICOLAU et Emmanuel PAUL d'avoir accepté d'être les rapporteurs et de juger ce travail. Je suis très touché de l'honneur que me font les Professeurs Gaoussou TRAORÉ et Ouaténi DIALLO en acceptant d'être membres du jury et d'effectuer ce long voyage. Veuillez accepter, Messieurs les Professeurs, l'expression de ma profonde gratitude.

Il est très difficile sinon impossible de réaliser une thèse sans assistance financière et matérielle, je tiens à exprimer mes remerciements au RAGAAD (sans oublier Marie Françoise ROY pour son soutien particulier), SARIMA, Ambassade de France à Bamako (merci encore à Prof. Frank LORAY et à Prof. Ouaténi DIALLO pour leur dynamisme aux constitutions des dossiers), IRMAR, UFR (Dominique CERVEAU pour son soutien), Université Européenne de Bretagne (UEB), École Doctorale Matisse de Rennes 1 et à l'Université de Bamako pour ces soutiens particuliers.

Un grand merci aussi à tous les personnels administratifs de la faculté des Sciences et Techniques (FAST) à Bamako et à ceux de l'IRMAR pour leur infatigable aide aux constitutions des dossiers. Il me faut encore remercier toute l'équipe de géométrie analytique plus particulièrement Dominique CERVEAU pour ses conseils ainsi que Frédéric TOUZET, Guy CASALE et Gael COUSIN pour leur gentille hospitalité pendant mes séjours à l'IRMAR.

Je ne sais comment remercier tous les Professeurs que j'ai eu tout au long de mon parcours secondaire et universitaire (de Bamako à Niamey). Je tiens à remercier collectivement tous ces Professeurs, plus particulièrement les professeurs de la FAST. Je pense en particulier aux Professeurs : Karim SAMAKÉ et Gana Blaise TOGO pour

leurs soutiens, Diby DIARRA, Abdou FANÉ, Monzon TRAORÉ.... pour leurs conseils.

Bien sûr, tout au long de ce travail de recherche, les amis et les camarades ont une place prédominante. C'est un réel plaisir pour moi de les remercier tous pour leurs soutiens. À toutes les personnes qui, proche ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail, je suis très reconnaissant de leur soutien.

J'adresse également un grand merci à toute ma famille pour leur irremplaçable et inconditionnelle assistance et soutien sans faille. J'exprime toute ma profonde gratitude pour leurs sacrifices et surtout ceux de mes deux parents.

Enfin, et à titre personnel, je remercie très sincèrement Wassa qui a supporté mes humeurs et partagé quotidiennement mes joies et peines.

*Je la dédie à ma mère,  
Mariam DIARRA*

# Contents

<b>1</b>	<b>Structures projectives singulières et équations de Riccati</b>	<b>1</b>
1.1	Un survol ; notations . . . . .	1
1.2	Structures projectives singulières sur la surface de Riemann . . . . .	4
1.2.1	Preliminaires . . . . .	4
1.2.2	Équations Fuchsiennes . . . . .	5
1.3	Feuilletages de Riccati Fuchsien . . . . .	12
1.3.1	Définition . . . . .	12
1.3.2	Monodromie . . . . .	13
1.4	Correspondance de Riemann-Hilbert . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Classification pour les systèmes de Garnier <math>(g, n) = (0, n)</math></b>	<b>19</b>
2.1	Structure orbifold sous-jacente à une équation fuchsienne $E$ . . . . .	19
2.1.1	Structure orbifold formelle . . . . .	19
2.1.2	Structure orbifold métrique et uniformisation . . . . .	21
2.1.3	Structure orbifold et équations fuchsiennes . . . . .	22
2.1.4	Conséquences . . . . .	24
2.2	Solutions algébriques non élémentaires pour $(g, n) = (0, 5)$ . . . . .	25
2.2.1	Existence des revêtements . . . . .	29
2.2.2	Exposants $(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_{t_1}, \tilde{\theta}_{t_2}, \tilde{\theta}_\infty)$ . . . . .	30
2.3	Solutions de Garnier pour monodromies réductibles infinies . . . . .	31
2.4	Solutions algébriques du système de Garnier d'ordre 3 . . . . .	32
2.4.1	Pull-back de monodromies affines avec 6 pôles . . . . .	35
2.5	Système de Garnier d'ordre supérieur ou égal 4 . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Autres types de pull-back : les courbes bi-elliptiques</b>	<b>39</b>
3.1	Pull-Back de $\mathbb{P}^1(4+1)$ à $\mathbb{P}^1(5+2)$ . . . . .	39
3.2	Classification des solutions algébriques partielles pour $(g, n) = (2, 0)$ . . .	40
3.3	De $(g, n) = (0, 5)$ vers $(2, 0)$ via les revêtements bi-elliptiques . . . . .	45
3.3.1	Courbes bi-elliptiques . . . . .	45
3.3.2	De $(g, n) = (0, 5)$ vers $(1, 1)$ . . . . .	49
3.3.3	De $(g, n) = (0, 5)$ vers $(1, 2)$ . . . . .	51
3.3.4	De $(g, n) = (1, 2)$ vers $(2, 0)$ . . . . .	58
3.4	Revêtements de degré 6 . . . . .	62



<b>4</b>	<b>Calcul explicite de pull-back</b>	<b>67</b>
4.1	Méthode de Calcul de revêtements . . . . .	67
4.2	Solutions algébriques de Garnier . . . . .	70
4.3	Exemples pull-back hypergéométriques: . . . . .	71
4.3.1	Revêtements de degré 4: . . . . .	71
4.3.2	Expression explicite de revêtements de degré 6: . . . . .	74
4.4	Quelques exemples pull-back euclidiens . . . . .	78
4.4.1	Pour le triangle $(2, 2, \infty)$ . . . . .	78

# Introduction:

Le but de cette thèse est de construire des solutions spéciales pour les équations d'isomonodromie des systèmes (ou connexions) de rang 2 et à pôles simples sur les courbes. On va principalement s'intéresser aux équations de Garnier qui concernent les courbes rationnelles et construire des solutions algébriques non élémentaires. On considèrera aussi le cas des connexions holomorphes sur les courbes de genre 2 et mettrons en évidence des solutions partielles algébriques ou moins transcendentes qu'attendu.

Les objets déformés sont ou bien des systèmes d'équations linéaires  $2 \times 2$  à pôles simples sur  $\mathbb{P}^1$ , ou bien des équations fuchsienues d'ordre 2, ou bien des équations de Riccati à pôles simples. Sur une courbe  $X$  plus générale, on considèrera plutôt des connexions de rang 2, des structures projectives fuchsienues ou des feuilletages de Riccati respectivement. Les 3 points de vue sont équivalents via des transformations bien classiques que nous rappelons dans le premier chapitre. Pour chacun de ces objets, on peut définir une représentation de monodromie, i.e. un homomorphisme du groupe fondamental de la courbe  $X$  privée des pôles vers  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  (ou  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  selon le contexte). Lorsque la courbe  $X$  et les pôles sont prescrits, la représentation de monodromie caractérise l'équation différentielle (modulo transformations de jauge) et toute représentation est monodromie d'une telle équation : c'est la correspondance de Riemann-Hilbert (voir chapitre 1). Partant d'une équation  $E = E_0$  sur  $X$ , pour toute déformation  $X_t$  de la courbe (et plus généralement de la position des pôles), on peut construire une déformation analytique  $E_t$  de l'équation à monodromie constante : cette déformation est unique, c'est la déformation isomonodromique de l'équation. Il existe donc une déformation isomonodromique maximale paramétrée par l'espace de Teichmüller  $T_{g,n}$  où  $n$  le nombre de pôles (simples) de la courbe, et  $g$  son genre. Les constantes intervenant dans l'écriture de l'équation différentielle  $E_0$  deviennent alors des fonctions analytiques de  $t \in T_{g,n}$ . Lorsqu'on les regarde comme fonctions multiformes de l'espace des modules  $M_{g,n}$  (quotient de l'espace de Teichmüller par l'action du "Mapping Class Group"), elles satisfont des équations différentielles algébriques. Ceci est bien connu depuis les travaux de Schlesinger au moins en genre  $g = 0$  : l'isomonodromie implique que la déformation de la connexion est sous-jacente à une connexion plate définie sur l'espace total ; ces équations expriment alors la platitude de la connexion. En rang 2 et genre  $g = 0$ , les équations d'isomonodromie se réduisent aux systèmes de Garnier, et dans le cas le plus simple  $n = 4$ , à l'équation de Painlevé VI. Ce qu'il faut retenir de tout ça, c'est qu'on a une correspondance bi-univoque entre solutions des équations d'isomonodromie et dé-

formations isomonodromiques d'équations fuchsiennes (ou connexions). Le portrait de phase des équations d'isomonodromie définit un feuilletage de dimension  $N$  en dimension  $N + 2N$  où  $\dim(M_{g,n}) = N := 3g - 3 + n$  (on exclut les cas dégénérés  $N \leq 0$ ) et  $2N$  est le nombre de paramètres libres des équations (ou encore des monodromies) lorsqu'on a fixé la courbe, les pôles et les valeurs propres. Par exemple, une solution algébrique de l'équation (ou une feuille algébrique du feuilletage) correspondra à une déformation isomonodromique d'équation fuchsienne dont les coefficients sont des fonctions algébriques des paramètres.

En général, les solutions des équations d'isomonodromie sont très transcendentes, bien plus que les solutions de l'équation fuchsienne elle-même. C'est d'ailleurs comme cela que Painlevé a trouvé ses familles d'équations. On ne peut pas exprimer la solution générale de Painlevé VI à l'aide de solutions d'équations linéaires (ou même non linéaires du premier ordre) et d'opérations algébriques : Watanabe [47] montre que toute solution est ainsi transcendante excepté les solutions de type Riccati, et les solutions algébriques. Les premières apparaissent lorsque l'on considère les déformations isomonodromiques d'équations fuchsiennes réductibles (i.e. à monodromie triangulaire) : les coefficients de l'équation sont peu transcendents et satisfont une équation de Riccati. Watanabe les a classifiés, elles apparaissent pour des choix particuliers de valeurs propres. Les solutions algébriques apparaissent soit en familles, soit de manière sporadique et, si on en connaissait depuis Picard, la classification complète vient seulement d'être achevée par Lisovyy et Tykhyy [33]. Pour être plus exact, elle résulte de constructions de Picard, Hitchin ([17], [18]), Dubrovin, Mazzocco ([10], [11]), Kitaev ([26], [27], [28]) et surtout Boalch ([3], [4], [5]) qui a largement contribué à compléter la liste qui s'est ensuite avérée définitive : Lysovii et Tyckyy ont montré qu'il n'y en avait pas d'autres. On trouve (modulo symétries de Painlevé VI)

- 3 familles à un ou deux paramètres complexes,
- une famille à paramètre discret (points de torsion sur une courbe elliptique),
- 50 solutions sporadiques.

Bien que l'intérêt initial des équations de Painlevé étaient la transcendance de leur solution générique, les solutions algébriques ont elles aussi un intérêt. Elles permettent chez Doran de construire des fibrations elliptiques avec connexion de Gauss-Manin explicite, chez Boalch de construire des solutions explicites au problème de Riemann-Hilbert, de construire des équations uniformisantes explicites pour certaines orbifoldes arithmétiques, et dans la thèse en cours de Gael Cousin, de construire des feuilletages uniformisants pour les variétés modulaires de Hilbert rationnelles.

D'après un travail de Dubrovin et Mazzocco [11], la transcendance de la solution générale des systèmes de Garnier augmente avec  $N$  en ce sens qu'on ne peut intégrer le système de rang  $N + 1$  avec les solutions du système de rang  $N$ . Pour autant, il y aura encore des solutions spéciales, moins transcendentes qu'attendues, en considérant par exemple les déformations d'équations fuchsiennes réductibles, ou encore à monodromie

finie. Les premières, étudiées par exemple dans le livre de Iwasaki, Kimura, Shimomura et Yoshida [24], se ramènent à des solutions d'équations différentielles linéaires. Les secondes vont produire des solutions algébriques du système de Garnier ; c'est d'ailleurs comme cela que Boalch retrouve 49 des 50 solutions sporadiques de Painlevé VI. On pourrait tenter de classer ce type de solutions algébriques, par exemple pour Garnier avec  $N = 2$  ( $g = 0$  et  $n = 5$ ), il y en aura beaucoup, mais ce sont plutôt les solutions algébriques correspondant à des déformations d'équations fuchsienues non élémentaires (i.e. à monodromie Zariski dense) qui ont un intérêt. On les appellera "solutions algébriques non élémentaires". Dans le cas Painlevé VI ( $N = 1$ ), l'équation d'isomonodromie a de nombreuses symétries, et partant d'une des 49 solutions algébrique élémentaires construites par Boalch, on peut déduire par symétrie une autre solution algébrique, qui sera bien souvent non élémentaire. Par contre, dans le cas  $N > 1$ , le système de Garnier est moins symétrique : toutes les symétries vont préserver le fait d'être élémentaire (la monodromie est préservée). Le but principal de cette thèse est de construire des solutions algébriques non élémentaires des systèmes de Garnier pour  $N > 1$  ; aucune n'était connue avant.

La méthode que nous allons utiliser est due à Kitaev : elle permet de retrouver toutes les solutions algébriques de Painlevé VI modulo symétries. L'idée de départ est géniale car extrêmement simple ; elle ne nécessite même pas de comprendre les équations d'isomonodromie. On fixe une équation fuchsienne disons  $E$  sur  $\mathbb{P}^1$ , puis on la tire en arrière par une famille de revêtements ramifiés  $\phi_t : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . On obtient alors une famille d'équations fuchiennes  $E_t := \phi_t^* E$  qui, localement dans le paramètre  $t$ , là où la déformation est topologiquement triviale, est évidemment isomonodromique : la monodromie est essentiellement celle de l'équation  $E$  en bas. Maintenant, si l'on prescrit le type topologique du revêtement, la famille  $\phi_t$  forme une famille de Hurwitz : elle est algébrique et la déformation  $E_t$  sera elle-même à coefficients algébriques.

La difficulté principale pour mettre en pratique cette construction est que la dimension de déformation est en général trop petite face au nombre de pôles qu'aura  $E_t$  : on ne construira qu'une solution algébrique partielle de l'équation d'isomonodromie, la solution complète restant en général transcendante. On peut s'en convaincre par le calcul suivant en genre  $g = 0$ . Si  $E$  a  $n$  pôles sur  $\mathbb{P}^1$  et  $\phi_t$  de degré  $d$ , alors  $E_t$  aura en général  $nd$  pôles ; pour qu'elle soit élémentaire, on doit avoir  $n \geq 3$  et l'espace de déformation de  $E_t$  sera de dimension  $N(E_t) = nd - 3 \geq 3d - 3$ . Pourtant, le nombre de paramètres libres dans la construction sera borné par le nombre de valeurs critiques de  $\phi_t$ , c'est-à-dire par  $2d - 2$  d'après Riemann-Hurwitz :  $2d - 2 \ll 3d - 3 = N(E_t)$  (on veut évidemment  $d > 1$ ). Pour obtenir une déformation algébrique complète, il faudra que  $\phi_t$  ramifie suffisamment au dessus des pôles pour ne pas en avoir trop en haut ; pour autant, elle doit ramifier suffisamment en dehors pour garder des paramètres libres dans la construction.

Considérons un exemple simple pour fixer les idées. Prenons pour  $E$  une équation hypergéométrique (équation fuchsienne sur  $\mathbb{P}^1$  à  $n = 3$  pôles simples en  $z = 0, 1, \infty$ ) et considérons la famille de revêtements doubles  $\phi_t : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui ramifie au dessus d'un des pôles, disons  $z = \infty$ , et d'un paramètre libre  $z = t$ . Alors l'équation fuchsienne

$E_t = \phi_t^* E$  aura (pour  $t \neq 0, 1, \infty$ ) 5 pôles, à savoir 2 au dessus de  $z = 0$ , 2 au dessus de  $z = 1$ , et 1 au dessus de  $z = \infty$  ; on n'aura qu'une solution partielle (de codimension 1) au système de Garnier correspondant (qui est ici de rang  $N = 2$ ). Par contre, si l'exposant de l'équation  $E$  en  $z = \infty$  est  $\frac{1}{2}$  (i.e. la monodromie projective locale est d'ordre 2), alors la singularité de  $E_t$  au dessus sera apparente (sans monodromie locale) et on pourra la chasser par une transformation de jauge méromorphe. On se retrouve alors avec une déformation à 1 paramètre d'équation fuchsienne  $E'_t$  à 4 pôles. Il est facile de vérifier que le birapport des 4 pôles varie avec  $t$  : c'est une vraie déformation. C'est ainsi qu'on retrouve la famille de solutions algébriques de Painlevé VI à 2 paramètres (à savoir les exposants des pôles  $z = 0$  et  $z = 1$ ).

Il résulte d'un théorème de Klein que toute équation fuchsienne à monodromie finie est, modulo transformation de jauge, le tiré-en-arrière  $\phi^* E$  par un revêtement ramifié d'une équation hypergéométrique (plus précisément dans la liste de Schwarz). En particulier, toutes les solutions algébriques élémentaires construites par Boalch (et plus généralement leurs analogues pour les systèmes de Garnier) s'obtiennent aussi avec la méthode de Kitaev. Mais comme l'illustre l'exemple précédent, elle permet aussi de construire des solutions algébriques non élémentaires. Doran a classifié toutes celles que l'on pouvait construire de cette manière dans le cas de Painlevé VI : il retrouve les 3 familles (à un ou deux paramètres complexes) et 4 solutions sporadiques. Ces dernières s'obtiennent en tirant en arrière les hypergéométriques d'exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8})$  (groupes de triangles arithmétiques) par des revêtements de degré 10, 12 et 18.

Dans le chapitre 2 de la thèse, nous construisons des solutions algébriques non élémentaires des systèmes de Garnier de rang  $N > 1$  avec la méthode de Kitaev et obtenons la liste suivante.

Rang $N$	Triplets $(p_0, p_1, p_\infty)$	Degrés $d$	Type de ramification
2	$(2, 3, \infty)$	4	$(2 + 2; 3 + 1; 1 + 1 + 1 + 1)$
2	$(2, 3, \infty)$	6	$(2 + 2 + 2; 3 + 3; 2 + 1 + 1 + 1 + 1)$
3	$(2, 3, \infty)$	6	$(2 + 2 + 2; 3 + 3; 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$
2	$(2, 3, 7)$	12	$(3 + 3 + 3 + 3; \underbrace{2 + \dots + 2}_{6 \text{ fois}}; 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$

Table 1: Solutions algébriques non élémentaires pour Garnier  $N > 1$

Toutes les constructions proviennent d'une équation hypergéométrique en bas. Les triplets  $(p_0, p_1, p_\infty)$  sont les ordres des monodromies locales de celle-ci aux pôles  $z = 0, 1, \infty$  ; on peut choisir pour exposants  $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) := (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_\infty})$ . Lorsque  $p_\infty = \infty$ , l'ordre est arbitraire (il peut être infini ou fini  $> 6$ ) si bien qu'on peut choisir arbitrairement l'exposant  $\theta_\infty \in \mathbb{C}$  en  $z = \infty$  : on obtient alors une famille à 1 paramètre de solutions algébriques non élémentaires au système de Garnier de rang  $N$ . Remarquons juste que l'équation hypergéométrique sera non élémentaire (et donc l'équation  $E_t$  aussi) si et seulement si  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} < 1$ .

La colonne de droite décrit la partition des fibres au dessus de  $z = 0, 1, \infty$  respective-

ment. Par exemple, dans le premier cas,  $\phi_t$  (de degré  $d = 4$ ) a exactement deux points dans la fibre au dessus de  $z = 0$  avec ramifications simples, deux au dessus de  $z = 1$  l'une avec double ramification, l'autre étale, et enfin ne ramifie pas du tout au dessus de  $z = \infty$ . On obtient bien 5 pôles (non apparent, i.e. avec monodromie non triviale) pour  $E_t$ , un au dessus de  $z = 1$ , puis quatre au dessus de  $z = \infty$ , si bien que les exposants de  $E_t$  sont donnés par  $(\frac{1}{3}, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty)$ . On vérifie que le nombre  $N$  de paramètres libres est bien en accord avec le nombre de ramifications libres : la ramification totale doit être  $2d - 2 = 6 = 2 + 4 = N + (\#\text{ramifications au dessus des pôles})$ .

Remarquons que la deuxième solution est en fait une dégénérescence de la troisième.

**Théorème 1.** *Toute solution algébrique non élémentaire d'un système de Garnier de rang  $N > 1$  construite par la méthode de Kitaev provient (modulo symétrie) d'une des constructions du tableau précédent. En particulier, il n'y en a pas pour  $N > 3$ .*

Une première étape pour démontrer le théorème consiste à utiliser la structure orbifold sous-jacente de l'équation  $E$  en bas : on vérifie aisément qu'elle doit être hyperbolique, donc uniformisable par le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$ . En relevant la métrique par  $\phi_t$ , on déduit une métrique orbifold en haut avec  $N$  points de branchements. L'aire étant multipliée par le degré de  $\phi_t$ , ceci nous donne un premier raffinement de la formule de Riemann-Hurwitz. Elle permet rapidement de montrer que l'équation  $E$  a au plus 3 pôles (donc hypergéométrique, associée à un groupe de triangles hyperboliques) puis d'obtenir la borne grossière  $\deg(\phi_t) \leq 42$ . Ensuite, on obtient des bornes plus fines en tenant compte des exposants possibles de l'équation  $E$  et on termine par une discussion au cas par cas pour se ramener à la liste au dessus.

On s'est aussi intéressé aux solutions algébriques des systèmes de Garnier données par des déformations d'équations fuchsienues réductibles (mais dont le groupe de monodromie est infini). Par la méthode de Kitaev, on les obtient encore en tirant en arrière des équations hypergéométriques associées cette fois-ci aux triangles euclidiens, uniformisés par  $\mathbb{C}$ . La méthode précédente pour borner le degré de  $\phi_t$  ne s'applique plus. On parvient quand même à les classifier dans le cas où  $E_t$  a 5 ou 6 pôles (systèmes de Garnier de rang 2 et 3): on trouve une infinité de constructions possibles de degrés arbitrairement grands pour les triangles de type  $(2, 2, \infty)$  et  $(2, 3, 6)$  ; par contre, il n'y a pas de solution pour les triangles de type  $(2, 4, 4)$  et  $(3, 3, 3)$ .

Avant de parler du chapitre 3, commentons le chapitre 4 dans lequel plusieurs des solutions algébriques listées au dessus sont construites explicitement. Mais pour cela, il nous faut maintenant rappeler les systèmes de Garnier. Prenons une équation fuchsienne  $u'' + f(x)u' + g(x)u = 0$  avec pôles et exposants

$$\begin{array}{cccccccccc} x = 0 & 1 & \infty & t_1 & \cdots & t_N & q_1 & \cdots & q_N \\ & \theta_0 & \theta_1 & \theta_\infty & \theta_{t_1} & \cdots & \theta_{t_N} & 2 & \cdots & 2 \end{array}$$

les  $q_i$  étant des singularités apparentes, i.e. des points de branchement simples pour la structure projective associée. On a supposé pour simplifier que les  $t_i$  et  $q_i$  sont  $2N$  points distincts de  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Modulo changement d'inconnue  $u$ , on se ramène de manière

unique à la forme

$$f(x) = \frac{1 - \theta_0}{x} + \frac{1 - \theta_1}{x - 1} + \sum_{i=1}^N \frac{1 - \theta_{t_i}}{x - t_i} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{x - q_i}$$

et

$$g(x) = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x - 1} - \sum_{i=1}^N \frac{H_i}{x - t_i} + \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{x - q_i}.$$

Le fait que l'équation soit fuchsienne en  $x = \infty$  avec exposant  $\theta_\infty$  impose 2 conditions algébriques sur les coefficients qui permettent de déterminer  $c_0$  et  $c_1$  en fonction des autres. Le fait que les singularités  $q_i$  soient apparentes imposent  $N$  condition supplémentaires qui permettent d'exprimer les coefficients  $H_i$  comme fonction rationnelle des autres :

$$H_i = H_i(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N, t_1, \dots, t_N, \theta_{t_1}, \dots, \theta_{t_N}, \theta_0, \theta_1, \theta_\infty).$$

Presque toute représentation

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, t_1, \dots, t_N\}) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

est réalisable par au moins un élément de la famille précédente. De plus, une fois fixés les exposants<sup>1</sup>  $\theta_i \notin \mathbb{Z}$ , deux équations ne peuvent avoir des représentations conjuguées dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  que si elles sont égales. Une déformation

$$t = (t_1, \dots, t_N) \mapsto (p_i(t), q_i(t))$$

est alors isomonodromique si et seulement si (les exposants  $\theta_i$  sont constants et)

$$\begin{cases} \frac{\partial q_i}{\partial t_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_i} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N.$$

C'est la version classique du système de Garnier, un système hamiltonien non autonome. En jouant avec les équations du haut  $\frac{\partial q_i}{\partial t_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}$ , on peut exprimer les  $p_i$  comme fonctions rationnelles des  $t_j$ ,  $q_j$  et  $\frac{dq_j}{dt_k}$ , et par substitution dans les équations du bas, déduire un système d'équations du second ordre. Ainsi, la déformation est isomonodromique si et seulement si les singularités apparentes  $q_i$ , vues comme fonctions analytiques de  $t = (t_1, \dots, t_N)$ , satisfont un système d'équations différentielles du second ordre. Dans nos constructions au dessus, on tire en arrière par  $\phi_t$  une équation fuchsienne hypergéométrique ( $N = 0$ ) donc sans singularité apparente ; les singularités apparentes en haut, pour l'équation  $E_t = \phi_t^* E$ , sont exactement les  $N$  points de ramification libre de  $\phi_t$ . Notre construction nous fournit le nombre optimal de singularités apparentes : l'équation fuchsienne est déjà sous la forme normale au dessus pour appliquer le théorème de Garnier. Ainsi, ce sont les points de branchement libres de  $\phi_t$  qui, vus comme fonction

<sup>1</sup>Lorsque les exposants sont entiers, l'unicité n'est plus assurée.

des birapports des points non ramifiés au dessus de  $x = 0, 1, \infty$ , nous donneront la solution algébrique de Garnier. Dans le chapitre 4, nous explicitons ces solutions  $q_i(t_1, t_2)$  dans le cas  $N = 2$  pour les revêtements  $\phi_t$  de degré 4 et 6, puis dans le cas réductible du triangle  $(2, 2, \infty)$ , pour les revêtements de degré  $\leq 9$ .

Détaillons la première solution où  $\phi$  est de degré 4 de type  $(2 + 2; 3 + 1; 1 + 1 + 1 + 1)$  et l'équation  $E$  hypergéométrique d'exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta_\infty)$ . Quitte à composer par une transformation linéaire, on peut imposer en outre  $\phi(\infty) = 1$  et  $\phi(0) = \phi(1) = \infty$  par exemple. Ces conditions et celles concernant les ramifications nous donnent 7 équations algébriques sur les 9 coefficients libres de  $\phi$  (de degré 4) et on vérifie à la main que la famille ainsi définie est irréductible et rationnelle. On choisit une paramétrisation birationnelle, disons  $\phi_s$ ,  $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{P}_s^2$ . On déduit facilement l'équation  $t^2 - St + P = 0$  satisfaite par les deux autres points  $t_1$  et  $t_2$  de la fibre  $\phi^{-1}(\infty)$  : les fonctions symétriques  $S := t_1 + t_2$  et  $P := t_1 t_2$  sont des fonctions rationnelles de  $s$  à coefficients entiers. Pour paramétrer  $t_1$  et  $t_2$ , il faut faire un revêtement double ramifiant le long du discriminant  $S^2 = 4P$  : on vérifie qu'il est encore rationnel, disons  $\mathbb{P}_{s'}^2 \rightarrow \mathbb{P}_s^2$ , et on déduit une nouvelle paramétrisation  $\phi_{s'}$ ,  $t_1(s')$  et  $t_2(s')$ . On obtient ainsi une application rationnelle

$$(t_1, t_2) : \mathbb{P}_{s'}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{t_1}^1 \times \mathbb{P}_{t_2}^1$$

qui est génériquement de degré 4, ramifiant exactement le long de

$$t_1 = 0, 1, \infty, \quad t_2 = 0, 1, \infty \quad \text{et} \quad t_1 = t_2.$$

C'est la propriété de Painlevé. Par contre, les deux points critiques libres sont donnés par une autre équation du second ordre, seules les fonctions symétriques  $q_1 + q_2$  et  $q_1 q_2$  sont rationnelles. Un nouveau revêtement double est nécessaire. Le discriminant est une quartique irréductible sur  $\mathbb{Q}$ , union de deux coniques définies sur  $\mathbb{Q}(-\sqrt{3})$ . On obtient la paramétrisation finale après un dernier revêtement double rationnel  $\mathbb{P}_{s''}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{s'}^2$  défini sur  $\mathbb{Q}(-\sqrt{3})$ . L'application  $(t_1, t_2) : \mathbb{P}_{s''}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{t_1}^1 \times \mathbb{P}_{t_2}^1$  est maintenant de degré 4 et ramifie en dehors de  $t_i = 0, 1, \infty$  et  $t_1 = t_2$ . C'est bien connu que le système de Garnier tel qu'écrit au dessus ne satisfait pas la condition de Painlevé.

On s'est ensuite intéressé aux constructions en genre  $g > 0$ , plus spécialement lorsque  $E_t$  est de genre  $g = 2$  sans pôle (non apparent). Dans ce cas, les solutions des équations d'isomonodromie sont des fonctions de 3 paramètres (dimension de l'espace de Teichmüller). Les déformations algébriques que l'on peut construire par la méthode de Kitaev sont de codimension 1 dès que le groupe de monodromie est (réductible) infini, et de codimension 2 (donc dimension 1) dès que la monodromie est non élémentaire (Zariski dense). Nous classifions ces dernières (voir table 3.2). Le revêtement de plus bas degré est décrit dans la section 3.4.

Plutôt que de regarder les solutions algébriques, on peut aussi chercher des solutions anormalement moins transcendentes que la solution générique. Dubrovin et Mazzocco montrent qu'on ne peut exprimer les solutions d'un système de Garnier de rang  $N + 1$  à partir de solutions d'un système de Garnier de rang  $\leq N$  et d'opérations algébriques : la transcendance de la solution générale croît avec  $N$ . Nous avons cherché à mettre en évidence des solutions moins transcendentes qu'attendues à l'aide de la méthode de



Kitaev. Nous avons d'abord cherché à construire une famille  $E_{s,t} = \phi_{s,t}^* E_t$  où  $E_t$  est une déformation isomonodromique d'équation fuchsienne à 4 pôles sur  $\mathbb{P}^1$ , donc paramétrée par une transcendante de Painlevé, et  $\phi_{s,t}$  dépend à la fois de  $t$  en ce sens qu'elle garde les mêmes ramifications au dessus des pôles non apparents de  $E_t$  (ces derniers dépendent de  $t$ ), et dépend d'un paramètre auxiliaire  $s$  donné par un point critique libre (en dehors des pôles de  $E_t$ ) comme dans les précédentes constructions. Une telle déformation  $E_{s,t}$  serait algébrique en  $s$  et transcendante (mais pas trop, de rang  $N = 1$ ) en  $t$ . Nous montrons au début du chapitre 3 qu'il n'existait pas de telle construction non élémentaire avec  $E_{s,t}$  ayant 5 pôles. Par contre, cette construction marche en genre 2. Plus précisément, on peut considérer la famille de revêtements doubles  $\phi_{r,s,t} : X_{r,s,t} \rightarrow \mathbb{P}^1$  ramifiant au dessus de  $x = 0, 1, \infty, r, s, t$ . On obtient la famille des courbes de genre 2

$$\begin{array}{ccc} X_{r,s,t} = \{(x, y) ; y^2 = x(x-1)(x-r)(x-s)(x-t)\} & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

Si on considère une famille isomonodromique d'équations  $E_{s,t}$  sur  $\mathbb{P}^1$  avec pôles en  $x = 0, 1, \infty, s, t$  et exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , elle se relève en une famille isomonodromique  $E_{r,s,t}$  le long de la déformation  $X_{r,s,t}$ . La déformation ainsi obtenue est paramétrée par une solution du système de Garnier correspondant (5 pôles,  $N = 2$ ) dépendant des paramètres  $s$  et  $t$  ; sa dépendance en  $r$  est algébrique.

La fin du chapitre 3 est consacrée à l'étude d'une autre famille d'exemples, toujours de  $\mathbb{P}^1$  privé de 5 points vers une courbe de genre 2. Nous considérons cette fois-ci une famille de revêtements  $\phi_{s,t} : \tilde{X}_{s,t} \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré 4 ramifiant totalement à l'ordre 2 au dessus  $x = 0, 1, \infty, s, t$  (il n'y a pas de point critique libre) et, comme précédemment, on tire en arrière une famille isomonodromique d'équations  $E_{s,t}$  sur  $\mathbb{P}^1$  avec pôles en  $x = 0, 1, \infty, s, t$  et exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . À la différence du cas précédent, la famille relevée  $\phi_{s,t}^* E_{s,t}$  n'est plus complète (on n'a que 2 paramètres libres) mais elle définit une  $sl(2)$ -connection holomorphe, donc à monodromie dans  $SL(2, \mathbb{C})$  ; ceci résulte par exemple du fait que  $\phi_{s,t}^* E_{s,t}$  a cette fois-ci un nombre pair de singularités apparentes (voir chapitre 1). Le revêtement  $\phi_{s,t}$  se décompose en 2 revêtements doubles successifs

$$\tilde{X}_{s,t} \rightarrow C_t \rightarrow \mathbb{P}^1$$

le premier (à droite) ramifiant au dessus de  $x = 0, 1, \infty, t$  est elliptique

$$\begin{array}{ccc} C_t = \{(x, y) ; y^2 = x(x-1)(x-t)\} & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

le point  $x = s$  a 2 préimages, disons  $p_1$  et  $p_2$  ; le deuxième revêtement double (à gauche) ramifie sur ces deux derniers points. La famille de courbes  $\tilde{X}_{s,t}$  obtenue par cette construction est donc bi-elliptique : elle est aussi revêtement double de  $C_s$  et le revêtement total est le produit fibré des deux revêtements elliptiques. Pour une présentation convenable du groupe fondamental

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 ; [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] = 1 \rangle$$

l'involution bi-elliptique (transformation du revêtement  $\tilde{X}_{s,t} \rightarrow C_t$ ) agit sur le groupe fondamental en permutant

$$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 \leftrightarrow \beta_2.$$

Les courbes de genre 2 bi-elliptiques forment une famille de codimension 1 dans l'espace de Teichmüller (de dimension 3) caractérisée par le fait qu'elles possèdent un automorphisme holomorphe d'ordre 2 agissant sur le groupe fondamental comme au dessus. C'est une surface algébrique dans l'espace des modules  $M_{2,0}$ . Dans la section 3.3.4, nous caractérisons les connexions sur la courbe de genre 2 qui proviennent de notre construction :

**Théorème 2.** *La déformation isomonodromique d'une  $sl(2)$ -connection holomorphe sur une courbe de genre 2 provient de la construction précédente, c'est à dire est paramétrée par une solution d'un système de Garnier de rang  $N = 2$  lorsqu'on la restreint au lieu des courbes bi-elliptiques, dès que sa représentation de monodromie, donnée par*

$$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{telles que} \quad [A_1, B_1][A_2, B_2] = I$$

satisfait

$$\mathrm{trace}[A_1, B_1] \neq 2$$

et

$$A_2 = M^{-1}A_1M \quad \text{et} \quad B_2 = M^{-1}B_1M \quad \text{où} \quad M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{trace}(M) = 0$$

(i.e.  $M^2 = -I$ ).

La première condition est suffisante, mais pas nécessaire : toute représentation diagonale (donc abélienne avec  $\mathrm{trace}[A_1, B_1] = 2$ ) descend et on retrouve comme cas particulier la construction faite par Machu dans sa thèse. La descente se fait en deux étapes. La seconde condition du théorème permet de descendre la connexion holomorphe (ou sa représentation de monodromie) sur la courbe elliptique  $C_t$  avec deux pôles en  $p_1$  et  $p_2$  et valeurs propres  $\frac{1}{2}$ . Notons que la condition  $M^2 = -I$  est essentiellement équivalente au fait que l'on ait aussi

$$A_1 = M^{-1}A_2M \quad \text{et} \quad B_1 = M^{-1}B_2M$$

c'est-à-dire que  $M$  relève l'involution bi-elliptique en un automorphisme de la connexion (ou représentation de monodromie). Ensuite, on démontre un théorème de descente plus général. Une courbe elliptique privée de 2 points est hyperelliptique : elle possède une unique involution qui permute ces deux points. C'est notre revêtement  $C_t \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui envoie les pôles  $p_1$  et  $p_2$  sur un même point,  $x = s$ . Le groupe fondamental de la courbe elliptique pointée est donné par

$$\langle \alpha\beta, \gamma_1, \gamma_2 ; [\alpha, \beta] = \gamma_1\gamma_2 \rangle$$

On montre

**Théorème 3.** *Considérons une  $sl(2, \mathbb{C})$ -connexion sur la courbe elliptique  $C_t$  avec deux pôles simples en  $t_1$  et  $t_2$  de même exposant  $\theta \notin \mathbb{Z}$ , dont la représentation de monodromie est donnée par*

$$A, B, D_1, D_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{telles que} \quad [A, B] = D_1 D_2.$$

*Alors la connexion (ou sa représentation de monodromie) descend sur  $\mathbb{P}^1$  (avec pôles  $0, 1, \infty, s, t$  et exposants  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2}$  respectivement) dès que  $\mathrm{trace}[A, B] \neq 2$ .*

# Chapter 1

## Structures projectives singulières et équations de Riccati

Dans ce chapitre, nous survolons les notions d'équations fuchsiennes, structures projectives fuchsiennes, équations et feuilletages de Riccati et enfin, systèmes de rang 2 et connexions. En voici un résumé.

### 1.1 Un survol ; notations

Une équation fuchsienne sur  $\mathbb{P}^1$  est une équation scalaire d'ordre 2

$$u'' + f(z)u' + g(z)u = 0$$

où  $f$  et  $g$  sont rationnelles avec des pôles d'ordre au plus 1 et 2 respectivement. Deux solutions indépendantes  $u_1$  et  $u_2$  d'une telle équation définissent une structure projective sur  $\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{pôles de } f, g\}$  dont les cartes (à valeur dans  $\mathbb{P}^1$ ) sont données par  $\varphi := u_1/u_2$ . La monodromie de la structure projective, c'est à dire la monodromie de  $\varphi$  le long d'un lacet, est donnée par  $\varphi \mapsto \frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}$  où  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est la matrice de monodromie pour la base de solutions  $(u_1, u_2)$ . Réciproquement, une telle application  $\varphi$  (à valeurs dans  $\mathbb{P}^1$  et à monodromie dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ ) définit une équation scalaire en posant  $f = 0$  et  $g = \frac{S(\varphi)}{2}$  où  $S$  est la dérivée schwarzienne (voir [36, 42]). La structure projective est dite fuchsienne si elle provient d'une équation fuchsienne, c'est à dire si  $S(\varphi)$  a au plus des pôles d'ordre 2.

Si  $\lambda(z)$  est une fonction non identiquement nulle, alors on peut changer d'inconnue  $u = \lambda(z)v$  dans l'équation fuchsienne ce qui ne change pas la structure projective. De cette manière, on peut se ramener à la forme normale  $f \equiv 0$  ; alors  $g = \frac{S(\varphi)}{2}$ . On peut tout aussi bien utiliser ce changement d'inconnue non plus pour tuer  $f$  mais pour tuer la partie d'ordre 2 de  $g$  de sorte que les pôles deviennent simples ; dans ce cas, le résidu de  $f$  en un pôle, disons  $z = 0$ , est  $1 - \theta$  où  $\theta$  est l'exposant. En fait, cette dernière normalisation n'est pas unique et  $\theta$  n'est notamment bien défini qu'au signe près. Alors

$\varphi$  qui n'est définie qu'au choix près de  $u_1$  et  $u_2$ , c'est à dire modulo composition par un élément de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ , peut être choisie de la forme

$$\varphi(z) = (h(z))^\theta$$

où  $h(z)$  est une coordonnée locale holomorphe ; on comprend bien pourquoi  $\theta$  n'est défini qu'au signe près puisque  $\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{(h(z))^\theta} = (h(z))^{-\theta}$  est aussi une coordonnée projective ( $w \mapsto \frac{1}{w}$  est dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ ). Ceci est vrai tant que  $\theta \notin \mathbb{Z}$  : dans le cas résonant, disons  $\theta = n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi$  sera en général plutôt logarithmique, i.e. de la forme

$$\varphi(z) = \frac{1}{(h(z))^n} + \log(h(z)).$$

En fait, dire que la structure projective est à singularités fuchsiennes, c'est dire qu'elle n'a que des singularités du type précédent (modulo composition par un élément de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ ). Notons que si  $z = w^k$  est un revêtement ramifié local, alors il est clair que le relèvement de la structure projective, ou de manière équivalente de l'équation scalaire, reste fuchsienne et l'exposant  $\theta$  devient  $k\theta$  en haut. La singularité est dite apparente si  $\theta \in \mathbb{Z}$  et qu'elle n'est pas logarithmique : la coordonnée projective  $\varphi$  est alors méromorphe. Ces singularités sont caractérisées par l'absence de monodromie de l'équation ou de la structure projective. On trouve plein d'exemples classiques de telles structures projectives fuchsiennes sur  $\mathbb{P}^1$  dans [42], notamment au chapitre IX ; l'équation hypergéométrique, qui décrit les structures projectives fuchsiennes avec 3 singularités, y est bien détaillée dans la section IX.2 et nous sera très utile dans notre chapitre 2.

L'équation de Riccati  $y' + y^2 + f(z)y + g(z) = 0$  se déduit en posant  $y = u'/u$ . Elle définit un feuilletage sur  $\mathbb{P}_z^1 \times \mathbb{P}_y^1$  qui est transverse à une fibre  $\mathbb{P}_y^1$  générique. Il est donc naturellement transversalement projectif et induit une structure projective sur la section  $y = \infty$  : c'est la même qu'avant. Voici donc une autre manière de décrire les structures projectives : se donner un feuilletage de Riccati, et une section qui n'est pas invariante. On peut se donner un tel couple plus généralement sur n'importe quelle surface réglée (ou fibré en  $\mathbb{P}^1$ ), au dessus de n'importe quelle surface de Riemann  $X$ . Par transformation birationnelle, on peut toujours se ramener au fibré trivial  $X \times \mathbb{P}_y^1$  et donc à une équation de Riccati  $dy + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  sont des 1-formes rationnelles sur  $X$ ). On peut de plus ramener la section à  $y = \infty$ . On peut encore jouer sur le groupe de jauge  $y \mapsto a(z)y + b(z)$  ; dans le cas  $X = \mathbb{P}^1$ , ceci permet d'une part de se ramener à  $y' + y^2 + f(z)y + g(z) = 0$  (on utilise  $a(z)$ ) et la liberté restante  $b(z)$  correspond au changement d'inconnue pour l'équation scalaire associée  $u'' + f(z)u' + g(z)u = 0$ . Une structure projective fuchsienne est maintenant caractérisée par le fait que, quitte à faire une transformation birationnelle plus générale  $y \mapsto \frac{a(z)y+b(z)}{c(z)y+d(z)}$ , le feuilletage de Riccati est à pôles simples (pôles pour l'équation de Riccati qui le définit dans une trivialisation locale du fibré) ; on peut de plus faire en sorte que la section soit transverse au feuilletage en tout point (voir [37]). Dans ce cas, pour une certaine trivialisation locale du fibré, l'équation de Riccati est donnée par  $y' + \frac{\theta}{z}y = 0$  (ou les modèles de Poincaré-Dulac dans le cas  $\theta \in \mathbb{Z}$ ) et on retrouve ainsi l'exposant  $\theta$  (bien défini au signe près).

Sur une surface de Riemann, on comprend bien ce qu'est une structure projective fuchsienne. On peut la définir localement par des équations fuchiennes, à qui on demande de se recoller deux-à-deux modulo changement d'inconnue. Il est souvent plus agréable de travailler avec un feuilletage de Riccati (muni d'une section). Enfin, si on pense à un fibré en  $\mathbb{P}^1$  comme le projectivisé d'un fibré vectoriel  $E \rightarrow X$  de rang 2, alors la Riccati est la projectivée d'une connexion  $\nabla$  sur  $E$  et la section provient d'un sous-fibré  $L \subset E$  en droites. Localement, dans une trivialisation locale de  $E$ , une connexion est donnée par un système

$$\nabla : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto d \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

qui nous donne, dans la coordonnée projective  $y = y_2/y_1$ , l'équation de Riccati  $dy - \beta y^2 + (\delta - \alpha)y + \gamma = 0$ .

La correspondance de Riemann-Hilbert nous dit qu'un feuilletage de Riccati à pôles simples est déterminé, modulo transformation birationnelle du fibré, par sa représentation de monodromie. L'ambiguïté birationnelle vient du choix des exposants  $\theta$  (qui ne sont définis par la monodromie locale que modulo  $\mathbb{Z}$ , et toujours au signe près) et des singularités apparentes. Ainsi, s'il n'y a pas de singularité apparente et si l'on fixe les  $\theta$ , on peut déformer le feuilletage (et la surface réglée) sans ambiguïté birationnelle de telle sorte que la monodromie soit constante (modulo conjugaison dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ ), en déformant la surface  $X$  et/ou la position des pôles. C'est ce qu'on appelle une déformation isomonodromique. Elle est sous-jacente à un feuilletage de Riccati de codimension 1 sur le fibré en  $\mathbb{P}^1$  au dessus de l'espace total de la déformation de la courbe pointée. Les équations d'intégrabilité (condition de Frobenius) nous donnent le système de Schlesinger. Dans le cas le plus simple,  $X = \mathbb{P}^1$  avec 4 pôles  $0, 1, t, \infty$ , il se réduit à l'équation de Painlevé VI.

Plus généralement, le bon cadre pour étudier les déformations isomonodromiques sur  $X = \mathbb{P}^1$  est de se ramener (par transformation birationnelle) à un feuilletage sur la surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_1$  : alors on reste sur ce fibré localement le long de la déformation. De plus, la section d'auto-intersection  $-1$  aura exactement  $N = n - 3$  tangences avec le feuilletage si celui-ci a exactement  $n$  pôles simples. Alors l'équation fuchsienne associée aura les  $n$  mêmes pôles, disons  $z = 0, 1, \infty, t_1, \dots, t_N$  (avec les mêmes  $\theta_i$ ) et en plus aura  $N$  singularités apparentes avec  $\theta = 2$ , disons  $z = q_1, \dots, q_N$ . L'équation fuchsienne  $u'' + f(x)u' + g(x)u = 0$  supposée à pôles simples est essentiellement déterminée par les  $t_i$ ,  $\theta_i$ ,  $q_i$  et les résidus  $p_i = \mathrm{Res}_{z=q_i} g(z)$ . C'est dans ce cadre, pour ces équations, que Garnier a déduit le "système de Garnier" des équations d'isomonodromies : une déformation

$$t = (t_1, \dots, t_N) \mapsto (q_i(t), p_i(t))_i$$

est isomonodromique si et seulement si les fonction  $q_i$  et  $p_i$  satisfont un certain système Hamiltonien

$$\frac{\partial q_i}{\partial t_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_i}$$

où les  $H_i(t, q, p)$  sont des fonctions rationnelles explicites (faisant aussi intervenir les  $\theta_i$ ).

Dans le cas  $n = 4$ , i.e.  $N = 1$ , on tire par substitution une équation du second ordre pour  $q$ , l'équation de Painlevé VI.

## 1.2 Structures projectives singulières sur la surface de Riemann

### 1.2.1 Préliminaires

**Définition 1.** Soit  $X_{g,n}$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$  avec  $n$  pointés (trous). On définit une structure projective sur la surface de Riemann compacte  $X_{g,n}$ , si elle est recouverte par l'atlas maximal  $(f_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{P}^1)_{i \in I}$ , les cartes locales  $f_i : U_i \rightarrow V_i$  sont des homéomorphismes et les fonctions de transitions  $\varphi_{i,j} : f_i(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$  sont des transformations de Möbius dans le groupe linéaire projectif  $PGL(2, \mathbb{C})$ .

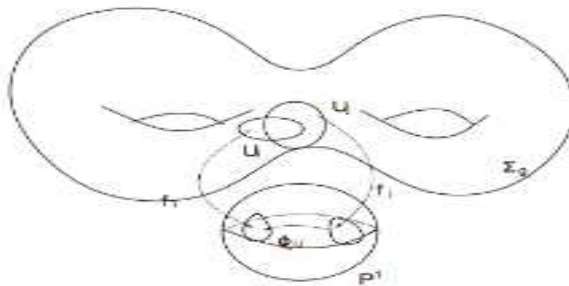


Figure 1.1: Structures projectives

Par exemple la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ , sur laquelle on définit une structure projective triviale : réalisées par les coordonnées projectives  $z$  dans la carte du pôle sud et les coordonnées projectives  $\frac{1}{z}$  dans la carte du pôle nord.

Toute structure projective sur la surface de Riemann compacte définit un difféomorphisme local  $f$  du revêtement universel  $\tilde{X}_{g,n}$  de  $X_{g,n}$  vers la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ . Localement, l'application  $f$  est un difféomorphisme complexe projectif par rapport aux structures projectives sur  $M_{g,n}$  : on appelle  $f$  l'application développante de la structure projective. On sait que le groupe fondamental  $\pi_1(X_{g,n}, a_0)$  de  $X_{g,n}$  à base  $a_0$  agit canoniquement sur le revêtement universel  $\tilde{X}_{g,n}$  de  $X_{g,n}$ , alors l'application développante  $f$  satisfait la propriété : pour tout lacet  $\gamma$ ,

$$f(\gamma.z) = \varphi_\gamma \circ f(z)$$

avec  $z \in \tilde{X}_{g,n}$  et  $\varphi_\gamma \in PGL(2, \mathbb{C})$ . La dérivée Schwarzienne de  $f$  par rapport à  $z$

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2; \text{ (où } f' = \frac{df}{dz}\text{)}$$

est bien définie à conjugaison près dans  $PGL(2, \mathbb{C})$ , c'est à dire elle est invariante par composition d'un élément  $\varphi \in PGL(2, \mathbb{C})$  à gauche de  $f$  de plus elle est holomorphe. Nous pouvons dire que la structure projective est induite par une équation différentielle du second ordre sur la surface de Riemann compacte  $X_{g,n}$  qui s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\{f, z\}}{2} u = 0.$$

Rappelons que cette équation a été appelée par Poincaré la forme normalisée de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + g(z) \frac{du}{dz} + h(z)u = 0$$

sur  $X_{g,n}$ , où  $g(z)$  et  $h(z)$  sont des fonctions méromorphes et la dérivée Schwarzienne dans sa normalisée  $\{f, z\} = 2h(z) - g'(z) - \frac{1}{2}g^2(z)$ . Poincaré était beaucoup intéressé par l'inversion des fonctions multi-valeurs i.e l'uniformisation de la courbe.

En particulier on peut dire qu'une structure projective sur la surface de Riemann compacte est définie par une équation différentielle du second ordre.

### 1.2.2 Équations Fuchsiennes

On veut étudier, dans cette partie, la transformation de l'équation différentielle Fuchsienne du second ordre sur la surface de Riemann compacte  $X_{g,n}$  à l'équation de Riccati Fuchsien par la projectivisation du système linéaire de rang deux et inversement, on donnera la condition d'intégrabilité ou d'équations isomonodromiques de ce système linéaire fuchsien.

On considère

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + g(z) \frac{du}{dz} + h(z)u = 0 \tag{1.1}$$

une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte  $X_{g,n}$  de genre  $g$  avec  $n$  pointés. Les pôles de ses coefficients  $g(z)$  et  $h(z)$  sont les pointés de  $X_{g,n}$  correspondant aux points singuliers de l'équation (1.1). L'équation (1.1) est dite *Fuchsienne (ou singulière régulière)* en un point  $a_1$  si  $g$  et  $h$  n'admettent qu'en ce point que pôle d'ordre 1 et 2 respectivement. Elle est fuchsienne si tous les pôles de  $g(z)$  et  $h(z)$  sont fuchiens. La forme normale de l'équation (1.1) s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \tilde{g}(z)u = 0, \tag{1.2}$$

avec  $\tilde{g} = h - \frac{1}{2}g' - \frac{1}{4}g^2$ , qui ne possède que des pôles d'ordre 2 à des même pointés de  $X_{g,n}$ .

La structure projective définie par l'équation (1.2) est dite *Fuchsienne ou singulière*. Ses coordonnées projectives sont déterminées par :  $\{f, z\} = 2h - g' - \frac{1}{2}g^2$ , où  $f = \frac{u_2}{u_1}$ ,  $u_2$  et



$u_1$  sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.2). Par exemple  $t_1 = 0$  et  $g = 0$  l'équation (1.1) est sous forme

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\lambda_0}{z} \frac{du}{dz} + \frac{k}{z^2} u = 0$$

où  $\lambda_0$  et  $k$  sont des constantes complexes. On normalise l'équation en faisant le changement de fonction d'inconnue  $u = z\tilde{u}$  et elle s'écrit sous la forme normale

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dz^2} + \frac{\frac{1-(\lambda_0-1)^2}{4} + k}{z^2} \tilde{u} = 0.$$

On appelle le terme  $\frac{\frac{1-(\lambda_0-1)^2}{4} + k}{z^2}$  le résidu de l'équation en 0. On pose  $\theta_0 = \lambda_0 - 1$ , est appelé l'indice qui est bien défini à signe près.

Si une structure projective singulière est définie par une équation Fuchsienne sur  $\mathbb{P}^1$  moins trois points, on peut envoyer ces trois pointés par une transformation projective sur 0, 1 et  $\infty$  respectivement, on obtient une famille d'équation Fuchsienne sur  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  de la forme :

$$z(z-1) \frac{d^2u}{dz^2} + ((\alpha + \beta + 1)z - \gamma) \frac{du}{dz} + \alpha\beta z = 0, \quad (1.3)$$

avec des singularités Fuchiennes 0, 1 et  $\infty$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des paramètres, appelée équation différentielle hypergéométrique ou équation de Gauss. Les paramètres  $\theta_0 = \gamma - 1$ ,  $\theta_1 = \alpha + \beta - \gamma$  et  $\theta_\infty = \alpha - \beta$  sont des indices de l'équation (3.1) autour de 0, 1 et de  $\infty$  respectivement. La forme normale de l'équation (3.1) est donnée par:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left( \frac{1 - \theta_0^2}{4z^2} + \frac{1 - \theta_1^2}{4(z-1)^2} + \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2 - \theta_\infty^2}{4z(z-1)} \right) u = 0.$$

On énonce un résultat de F. Klein datant de 1884 :

**Théorème 4** (F.Klein). [31] *Toute équation différentielle fuchsienne scalaire du second ordre de groupe de monodromie finie est pull-back de l'équation différentielle hypergéométrique.*

Équations différentielle Fuchiennes à quatre points singuliers sur  $\mathbb{P}^1$

On considèrera l'équation différentielle en envoyant ses quatre points singuliers sur 0, 1,  $\infty$  et  $t$ . On dit qu'une équation Fuchsienne du second ordre avec 4 points singuliers sur  $\mathbb{P}^1$  est l'équation de Heun à transformation homographique près si elle est projectivement équivalente à l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left( \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z-1} + \frac{\alpha_t}{z-t} \right) \frac{du}{dz} + \frac{az+b}{z(z-1)(z-t)} u = 0;$$

où les indices au voisinage de 0, 1,  $t$  et  $\infty$  sont respectivement  $\theta_0 = \alpha_0 - 1$ ,  $\theta_1 = \alpha_1 - 1$ ,  $\theta_t = \alpha_t - 1$  et  $\theta_\infty = \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_t - 1)^2 - 4a}$ . Sous la forme normale, l'équation est donnée par :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left( \frac{1 - \theta_0^2}{4z} + \frac{1 - \theta_1^2}{4(z-1)} + \frac{1 - \theta_t^2}{4(z-t)} + \frac{1 - \theta_\infty^2}{4z(z-1)(z-t)} \right) u = 0.$$

Si  $X_{g,n}$  est une courbe algébrique définie par  $F(z, y) = 0$ , où  $F(z, y)$  est une fonction polynomiale irréductible en  $z$  et  $y$ , l'équation Fuchsienne normale sur  $X_{g,n}$  s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + g(z, y)u = 0.$$

Si on projette un pointé de la courbe  $F(z, y)$  sur  $z_i = t_i$ , son ordre de ramification du pointé est  $p_i$  ( $\theta_i = \frac{1}{p_i}$ ), i.e on tourne  $p_i$  fois au autour de  $t_i$ . Alors autour de  $t_i$  on pose  $z - z_i = Z^{\theta_i}$ , l'équation Fuchsienne s'écrit en bas sous la forme

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\theta_i}{(z - t_i)^2} u = 0.$$

### Transformation de l'équation fuchsienne du second ordre au système d'équations fuchiens

L'équation Fuchsienne du second ordre sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ ,

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + g(z) \frac{du}{dz} + h(z)u = 0$$

se transforme en général à un système linéaire Fuchsien de rang 2

$$\frac{dU}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h(z) & -g(z) \end{pmatrix} U \quad (1.4)$$

avec  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ , par le changement de fonctions d'inconnues  $u_1 = u$  et  $u_2 = \frac{du}{dz}$ , sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation Fuchsienne. Comme les points  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{P}^1$ ; avec  $t_i \neq t_j$  si  $i \neq j$ ; sont des points fuchiens de l'équation différentielle scalaire, au lieu de faire la transformation ci-dessus, on fait les transformations ci-après

$$u_1 = u \text{ et } u_2 = (z - t_1)(z - t_2) \cdots (z - t_n) \frac{du}{dz}.$$

On obtient après les calculs transformations le système d'équations

$$\frac{dU}{dz} = \left( \frac{A_1(t_1, \dots, t_n)}{z - t_1} + \cdots + \frac{A_n(t_1, \dots, t_n)}{z - t_n} \right) U; \quad (1.5)$$

sur  $\mathbb{P}^1$  où les  $A_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , sont des matrices d'ordre 2 dépendantes des paramètres  $t_1, \dots, t_n$ . Les pôles du système (1.5) sont simples, alors fuchiens et les matrices  $A_i(t)$  sont des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 cas spéciales. La monodromie de (1.5) autour de chaque pôles  $t_i$  est définie par  $M_i = \exp(2\pi i A_i(t))$ . On appelle le système d'équations différentielles (1.5) système de Schlesinger.

On voit que le système (1.4) est une connexion fuchsienne, notée  $\nabla$ , définie sur un fibré vectoriel de rang 2 au dessus  $\mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . Cette connexion de rang 2 est obtenue

par les collections de systèmes Fuchsien locaux après la transformation de l'équation (1.1) à l'équation (1.4) et les fonctions de recollement sont des éléments de  $H^1(M_{g,n}, \mathcal{O})$ . On remarque, dans le système (1.4), que le fibré vectoriel sur lequel la connexion est définie, est isomorphe à  $\mathcal{O}(0) \times \mathcal{O}(2)$ . Rappelons que tout  $\mathbb{P}^1$ -fibré peut être obtenu par la projectivisée de fibré vectoriel de rang 2. La projectivisation de la connexion  $\mathbb{P}^1(\nabla)$  définie là dessus est déterminée par:  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto w = \frac{u_1}{u_2} \in \mathbb{P}^1$ .

Après l'avoir substitué dans (1.4), réduit le système Fuchsien à l'équation

$$\frac{dw}{dz} + w^2 + g(z)w + h(z) = 0 \quad (1.6)$$

avec des singularités Fuchsiennes, que l'on appellera équation de Riccati Fuchsien.

### Représentation de monodromie

On considère une connexion méromorphe  $\nabla$  sur un fibré vectoriel de rang 2 au dessus de  $X_{g,n}$ :

$$\frac{dU}{dz} = A(z)U$$

avec  $A(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$ ,  $\text{Det}(A(z)) = 1$ .

Le vecteur colonne  $U$  constitué par les deux solutions linéaires indépendantes du système est un élément du groupe linéaire inversible  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ , est appelé système fondamental de solution. Le système fondamental de solution  $U$  du système est holomorphe sur le revêtement universel  $\tilde{X}_{g,n}$  de  $X_{g,n}$ . Soit  $u$  un autre système fondamental de solution de notre système et  $G$  un groupe de transformation de Dek de  $\tilde{X}_{g,n}$ . Si  $\gamma \in G$ ;  $U$  et  $u$  définis sur  $\tilde{X}_{g,n}$  sont solutions du système fuchsien alors  $u \circ \gamma$  et  $U \circ \gamma$  les sont aussi. On peut obtenir une solution inversible du système à la forme matriciale en multipliant à droite de  $U$  par une matrice constante inversible  $\varphi(\gamma)$  alors

$$U = (U \circ \gamma)\varphi(\gamma).$$

On appelle  $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$  la représentation de monodromie. Cette représentation est bien définie à conjugaison près dans  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ . La classe conjugante de monodromie du système fuchsien est la classe d'équivalence de cette conjugaison.

### Transformation du système d'équations à l'équation différentielle fuchsienne du second ordre

On regarde d'abord la projectivisation du système fuchsien ci-dessus, on va supposer que  $b(z) \neq 0$ . Alors la projectivité de connexion  $\nabla$  donne en effet la relation suivante:

$$\frac{dw}{dz} = -b(z)w^2 + (d(z) - a(z))w + c(z).$$

L'équation Fuchsienne du second ordre de type (1.1) correspondante à la transformée du système Fuchsien s'écrit sous la forme

$$u'' + g(z)u' + h(z)u = 0$$

avec des coefficients

$$\begin{cases} g(z) = -\frac{d \ln(b(z))}{dz} - \text{Tr}(A(z)), \\ h(z) = \text{Det}(A(z)) - \frac{d(a(z))}{dz} + a(z) \frac{d(\ln(c(z)))}{dz}. \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $\text{Tr}(A(z))$  est la trace de la matrice  $A(z)$ .

Si  $b(z) = 0$ , toutes les racines de fonction rationnelle  $b(z)$  sont des racines simples distinctes. Elles sont aussi des points singuliers réguliers de l'équation Fuchsienne (1.1) de valeurs propres entières. Les indices de l'équation (1.1) autour de ces points singuliers sont tous égaux à 1, alors on appelle ces nouvelles singularités de l'équations Fuchsienne (1.1) points singuliers apparents.

Si on pose  $X_{g,n} = \mathbb{P}^1$  i.e  $g = 0$  et  $t_i$ , avec  $i = 1, \dots, n$ , des points singuliers du système d'équations dont on fixe trois points  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$  et  $t_n = \infty$ . Alors on écrit explicitement le système fuchsien

$$\frac{dU}{dz} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i(t)}{z - t_i} \right) U; \quad (1.8)$$

avec  $A_i(t) = \begin{pmatrix} a_i(t) & b_i(t) \\ c_i(t) & d_i(t) \end{pmatrix}$ ,  $a(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i(t)}{z - t_i}$ ,  $b(z) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i(t)}{z - t_i}$ ,  $c(z) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i(t)}{z - t_i}$  et  $d(z) = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{z - t_i}$ . Les valeurs propres de la matrice sont indépendantes aux paramètres  $t = (t_1, \dots, t_n)$ . Les monodromies du système fuchsien restent invariante aux variations des autres pôles  $t_i$  non fixés. Cela définit une déformation isomonodromique du système, on dit que le système est de type isomonodromique. Les équations isomonodromique sont définies par les conditions d'intégrabilités du système. Pour cela on pose  $\omega = \sum_{i=1}^n \frac{A_i(t)}{z - t_i} dz$ ; est une 1-forme différentielle. Le système fuchsien est intégrable si  $d\omega = \omega \wedge \omega$ , est équivalent

$$dA_i(t) = - \sum_{j \neq i, j=1}^m \frac{[A_i(t), A_j(t)]}{t_i - t_j} d(t_i - t_j). \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) est appelée équation isomonodromique du système d'équations fuchiens sur  $\mathbb{P}^1$ . Les  $n - 1$  pôles  $t_i$  non fixés varient sur une sous-variété qui prennent des valeurs distinctes en tous les points de cette sous-variété. On peut voir que les pôles libres (non fixés à 0, 1 et  $\infty$ )

$$t_i : T \rightarrow \mathbb{P}^1,$$

$i = 3, \dots, n - 3$  où  $T$  est l'espace de déformation (ou espace de Teichmüller) de  $t_i$ , sont des revêtements ramifiés avec des valeurs critiques 0, 1 et  $\infty$  et  $t_i = t_j$   $i \neq j$ . Alors on peut dire que les  $t_i$  sont des fonctions de Belyi. Les matrices de Monodromies  $M_i$  du système fuchsien restent constante à la variation de pôles libres sur  $T$ .

La transformation du système Fuchsien (1.4) à l'équation Fuchsienne (1.1) sur  $\mathbb{P}^1$  avec  $n$  pôles simples, le nombre de points apparents apparus dans l'équation (1.1) est  $n - 3$ . On note  $t_i, i = 1, \dots, n$  et  $q_j, j = 1, \dots, n - 3$  sont respectivement les vrais points singuliers et les points singuliers apparents de l'équation. Les singularités  $q_j$  sont des fonctions algébriques en  $t = (t_1, \dots, t_n)$ .

Toutes les matrices, que nous choisissons, sont toutes de traces nulles de valeurs propres  $\theta$  satisfont les relations suivantes :

$$a(z) + d(z) = 0$$

$$a^2(z) + b(z)c(z) = \theta^2$$

Les coefficients  $g(z)$  et  $h(z)$  de (1.1) reprennent la forme.

**Proposition 1.** *Étant donné le système Fuchsien ci-dessus tel que l'élément  $b(z)$  s'annule en des points  $q_i$  de multiplicité 1. Alors le système transforme en équation Fuchsienne du second ordre*

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + g(z) \frac{du}{dz} + h(z)u = 0,$$

où

$$\begin{cases} g(z, t_1, \dots, t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1-\theta_i}{z-t_i} - \sum_{j=1}^{n-3} \frac{1}{z-q_j}, \\ h(z, t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\theta_i-1)^2 - \theta_\infty^2}{4z(z-1)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i(t_i-1)H_i}{z(z-1)(z-t_i)} + \sum_{j=1}^{n-3} \frac{q_j(q_j-1)P_j}{z(z-1)(z-q_j)} \end{cases} \quad (1.10)$$

*Proof.* Pour la preuve de proposition (voir [24]) □

D'après la proposition précédente, on constate que les résidus  $H_i = -\text{Res}_{z=t_i} h(z)dz$  et  $P_i = \text{Res}_{z=q_j} h(z)dz$ . Les résidus  $H_i$  sont déterminés comme des fonctions rationnelles à  $(\theta_0, \dots, \theta_n; q_1, \dots, q_{n-1}; P_1, \dots, P_{n-1}, t_1, \dots, t_n)$ . Comme les valeurs propres  $\theta_i$  sont invariantes par la variation des autres paramètres, on ne va pas les considérer comme variables de  $H_i$ . Les  $H_i$  sont encore appelés les Hamitonien. Si l'équation différentielle fuchsienne correspond au système de Schlesinger, on exprime explicitement  $H_i$  et  $P_i$  comme suit :

$$P_j = \sum_{i=1}^n \frac{a_i(t)}{q_j - t_i}; j = 1, \dots, n - 3,$$

$$H_i = \sum_{j=1}^{n-3} \frac{a_i(t)}{q_j - t_i} + \sum_{j=1}^i \frac{1}{t_i - t_j} (a_i(t) + a_j(t) - \theta_i \theta_j) + \text{Tr}[A_i(t) \sum_{j=1}^i \frac{A_j(t)}{t_i - t_j}].$$

On appelle, en général, les paramètres

$$(q_1(t), \dots, q_{n-3}(t), P_1(t), \dots, P_{n-3}(t))$$

coordonnées de Darboux (pour plus de detail voir ([11])).

**Théorème 5** (Garnier). [13] Une déformation de coordonnées de Darboux

$$(q_1(t), \dots, q_{n-3}(t), P_1(t), \dots, P_{n-3}(t))$$

est isomonodromique si et seulement si elle est solution du système Hamiltonien

$$\begin{cases} \frac{\partial q_j}{\partial t_i} = \frac{\partial H_i}{\partial P_j}, \\ \frac{\partial P_j}{\partial t_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_j}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Le système (1.11) déduit un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre appelé système de Garnier de dimension  $m = n - 3$ . Le cas le plus simple de ce système est  $n = 4$  avec un point singulier apparent  $q$ . On a

$$\begin{aligned} H(q, P, t) = & \frac{1}{t(t-1)}[q(q-1)(q-t)P^2 + (\theta_0(q-1)(q-t) + \theta_1q(q-t) \\ & + (\theta_t-1)q(q-1))P + \frac{1}{4}((\sum_{i=0,1,t} \theta_i - 1)^2 - \theta_\infty^2)q], \end{aligned}$$

est hamiltonien de L'équation différentielle de Painlevé *VI*. Alors les coordonnées  $(q(t), P(t))$  sont solutions algébriques de Painlevé *VI*. En général, elles sont très transcendantes singulières en  $t = 0, 1, \infty$ . La liste complète de classification des solutions algébriques de l'équation de Painlevé *VI* est déjà connu par les travaux de plusieurs personnes telles que Hitchin [17], Dubrovin-Mozzocco [10], A. Kitaev [28], P. Boalch [4], ... Lisovyy-Tykhyy ont confirmé, en septembre 2008, que la liste de solution algébrique de Painlevé *VI* est complète.

Le système de Garnier devient plus compliquer si sa dimension  $m \geq 2$ , qu'on veut étudier les solutions algébriques complètes de ces systèmes. Nous sommes intéressés dans le prochain chapitre la classification des solutions algébriques complètes du système de Garnier de dimension  $m \geq 2$  correspond à des équations isomonodromiques de déformations des équations différentielles fuchsienues avec au moins 5 points singuliers essentiels et deux points singuliers apparents.

**Remarque 1.** On pose  $w = \frac{f''}{f'}$ , dans la dérivée Schwarzienne ci-dessus, on s'aperçoit qu'autour de chaque points singuliers  $t_i$  de valeur propre  $\theta_i \in \mathbb{C}^*$  l'équation  $\frac{dw}{dz} - \frac{1}{2}w^2 = \frac{1-\theta_i^2}{4(z-t_i)}$  est Riccati.

Considérons l'équation de Riccati générale sur  $X_{g,n}$

$$\frac{dw}{dz} = a(z)w^2 + b(z)w + c(z). \quad (1.12)$$

Si  $a(z) = 0$  l'équation (1.12) dégénère à une équation linéaire du premier ordre.

Si  $a(z) \neq 0$  l'équation (1.12) transforme après le changement de fonction inconnue

$$w = -\frac{\frac{du}{dz}}{a(z)u}$$

en équation différentielle du second ordre

$$a(z)\frac{d^2u}{dz^2} - (a'(z) + a(z)b(z))\frac{du}{dz} + c(z)a^2(z)u = 0 \quad (1.13)$$

Pour ramener l'équation ci-dessus à sa forme canonique, on divise (1.12) les deux membres par  $a(z)$  ou on normalise  $a(z)$  à 1. Nous savons que la transformation linéaire  $u = k(z)\tilde{u}$ , où  $k$  est une fonction holomorphe à  $z$ , envoie équation (1.1) à une autre équation fuchsienne du second ordre. On dit que l'équation obtenue est projectivement à l'équation (1.1). Alors une transformation linéaire  $u = k(z)\tilde{u}$  de l'équation différentielle correspond à une transformation translation de  $w = \tilde{w} + \frac{k'(z)}{k(z)}$  pour l'équation de Riccati ; elle (1.12) prend en effet la forme

$$\frac{d\tilde{w}}{dz} = a(z)\tilde{w}^2 + (2\frac{k'(z)}{k(z)}a(z) + b(z))\tilde{w} + c(z) - \frac{k''(z)}{k(z)} + (\frac{k'(z)}{k(z)})^2 \quad (1.14)$$

**Proposition 2.** [23] *Étant donnée une équation de Riccati sous la forme (1.12). On peut avoir une transformation linéaire  $w = k(z)\tilde{w}$  qui transforme équation (1.12) en équation de Riccati de l'inconnue  $\tilde{w}$  réduite à sa forme canonique. Alors il existe une et une seule  $k(z)$  telle que  $k(z) = \frac{1}{\alpha(z)}$ .*

Si la solution générale de l'équation (1.1) est  $u = c_1u_1 + c_2u_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes complexes et  $u_1$  et  $u_2$  sont les deux solutions particulières de (1.1), alors la solution générale de l'équation (1.6) est  $w = \frac{c_1u'_1 + c_2u'_2}{c_1u_1 + c_2u_2}$ . Nous remarquons que toute transformation homographique d'une équation fuchsienne du second ordre sur  $\mathbb{P}^1$  définit une équation de Riccati sur la même surface de Riemann et réciproquement. Cette transformation n'agit pas sur la surface de Riemann. L'équation fuchsienne est invariante pour toute transformation projective sur la surface de Riemann ainsi que l'équation de Riccati l'est aussi.

## 1.3 Feuilletages de Riccati Fuchsien

### 1.3.1 Définition

On appelle le feuilletage  $\mathcal{F}$  de Riccati sur le  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi_1 : E \rightarrow X_{g,n}$  au dessus de la surface de Riemann  $X_{g,n}$  la collection de cartes  $(z_i, w_i) \in U_I \times \mathbb{P}^1$  tel que :

$$\frac{dw_i}{dz_i} = a_i(z_i)w_i^2 + b_i(z_i)w_i + c_i(z_i),$$

$a_i(z_i)$ ,  $b_i(z_i)$  et  $c_i(z_i)$  sont des fonctions méromorphes sur  $U_i$  et les fonctions de transitions sont celles de  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $E$ .

Les points singuliers du Feuilletage sont situés au dessus des pôles  $t_1, \dots, t_n$  de ces coefficients  $a_i(z_i)$ ,  $b_i(z_i)$  et  $c_i(z_i)$ . Une fibre invariante par feuilletage au dessus d'un

point singulier  $t_i$  est la réunion de feuilles verticales au dessus de ce point. La multiplicité de fibres invariantes est l'ordre de ces pôles. Le feuilletage de Riccati est Fuchsien si toutes ces fibres invariantes sont simples i.e l'ordre de ces pôles est égal à 1. Le nombre de points singuliers au dessus d'un pôle est égal à 1 ou 2. Le feuilletage tangent  $T_{\mathcal{F}}$  à  $\mathcal{F}$  est défini par les zéros (diviseurs) de champ de vecteur sur la surface réglée  $S$  de  $E$ . Au point de vu homologique on a :  $T_{\mathcal{F}} = (2 - 2g - n).f$  avec  $n$  le nombre de pôles comptés avec multiplicité,  $f$  la fibre et  $g$  le genre de  $X_{g,n}$ . Nous rappelons encore si une courbe irréductible  $C$  (i.e la section  $\sigma$  de surface réglée pour notre cas) n'est pas invariante par le feuilletage alors le nombre de tangence de courbe  $C$  à  $\mathcal{F}$  est donnée par :

$$\text{Tang}(C, \mathcal{F}) = C.C - C.T_{\mathcal{F}}. \quad (1.15)$$

Localement au voisinage d'une fibre invariante de multiplicité 1, on peut avoir une carte  $(z, w) \in U \times \mathbb{P}^1$  dans laquelle Poincaré et Dulac [41] avaient défini le feuilletage de Riccati par les modèles suivants :

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = \theta \cdot \frac{w}{z}, & \theta \in \mathbb{C}^* \\ \frac{dw}{dz} = \frac{nw+z^n}{z}, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\theta$  est l'indice de l'équation déterminée ci-dessus, on peut également appeler  $\theta$  la valeur propre de  $\mathcal{F}$ . Ces modèles sont uniquement déterminés à signe près de  $\theta$ . Si on considère le premier cas du modèle (1.16), ses points singuliers sont  $(0, 0)$  et  $(0, \infty)$  et les droites horizontales correspondantes sont invariantes par le feuilletage. Si  $\theta \notin \mathbb{Q}$  toutes les feuilles du feuilletage sont denses dans le voisinage de fibre invariante or si  $\theta \in \mathbb{Q}$  i.e  $\theta = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{Z}^*$ , les feuilles constantes définies par  $\frac{w^q}{z^p} = \text{Constante}$  sont des courbes invariantes par feuilletage  $\mathcal{F}$ .

La seconde équation du modèle (1.16) :

- si  $n \neq 0$  les points singuliers sont  $(0, 0)$  et  $(0, \infty)$  ;
- si  $n = 0$  le feuilletage est régulier sur  $(0, 0)$  ; sur  $(0, \infty)$  le feuilletage admet une unique courbe invariante  $w = \infty$  au voisinage de fibre invariante et les autres feuilles sont denses dans un ouvert de Zariski.

### 1.3.2 Monodromie

On considère un point  $t_0$  régulier du feuilletage  $\mathcal{F}$  sur la surface  $X_{g,n}$  ; soit  $\gamma_i$  lacet tournant autour du point singulier  $t_i$  puis revenant au point  $t_0$  (point base). A chaque tour des sections le long du lacet  $\gamma_i$ , elles arrivent en  $t_0$  avec des nouvelles valeurs qui sont conjuguées aux précédentes dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  par  $\varphi_i(z) = e^{2\pi\theta_i \cdot i} z$ , si  $\theta \in \mathbb{C}^*$  ou par  $\varphi_i(z) = z + 1$  si  $\theta_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\theta_i$  les valeurs propres autour de  $t_i$   $i = 1, \dots, n$ . On appelle  $\varphi_i(z)$  la monodromie de feuilletage  $\mathcal{F}$  autour de  $t_i$ . Elle ne dépend que la classe d'homotopie de  $\gamma_i$  i.e la monodromie  $\tilde{\varphi}_i$  autour d'un lacet  $\tilde{\gamma}_i$  à point base  $t'_0$  très proche de  $t_0$  est conjugué à  $\varphi$  dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  i.e il existe  $\psi \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$  tel que

$$\tilde{\varphi}_i(z) = \psi^{-1} \circ \varphi_i \circ \psi(z).$$



Cela induit un homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned}\rho & : \pi_1(X_{g,n}, t_0) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) & \mapsto (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))\end{aligned}$$

que nous l'appellerons la représentation de monodromie, son image est un sous-groupe de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  appelée groupe de monodromie.

## 1.4 Correspondance de Riemann-Hilbert

Nous avons déjà rappelé qu'une structure projective Fuchsienne est définie par l'équation Fuchsienne. Deux structures projectives Fuchiennes  $F$  et  $F'$  sont équivalentes s'il existe un isomorphisme  $\phi : F \rightarrow F'$  qui est invariant par la projection sur  $C = X_{g,n}$ . Soit  $F$  une structure projective sur  $C^* = C \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  de genre  $g$ , on peut lui associer sa représentation de monodromie  $\rho : \pi_1(C^*) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ ;  $\gamma_i \mapsto \varphi_{\gamma_i}$ ,  $\varphi_{\gamma_i}$  est la monodromie de structure projective Fuchsienne autour de chaque  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $t_i$  sont des points singulier-réguliers (pointé) de  $F$ . On voit que cette représentation est unique à conjugaison près dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ , elle est une application bien définie à conjugaison près dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ . Notons  $F(C^*)$  l'ensemble de structures projectives Fuchiennes à isomorphisme près sur  $C$  et  $\mathcal{R}(C^*) = \mathrm{Hom}(\pi_1(C^*), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})) / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  l'ensemble de représentations de monodromies à conjugaison près dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  sur  $C^*$ . On peut définir une correspondance  $\Pi : F(C^*) \rightarrow \mathcal{R}(C^*)$  que l'on l'appellera application de monodromie ou application de Riemann-Hilbert. On veut étudier localement la bijectivité de cette application ; en effet, il sera intéressant de savoir que la dimension de l'espace de ces deux ensembles est la même. On sait que l'espace de l'ensemble de structures projectives Fuchiennes est un espace vectoriel associé à l'espace de l'ensemble des différentielles quadratiques rationnelles  $H^0(C, K_C^{\otimes 2})$  [20] qui sont méromorphes sur  $C$  et ses pôles sont des pointés de  $C$ . Par la formule de Riemann-Roch, on peut calculer la dimension de  $H^0(C, K_C^{\otimes 2})$  :

**Théorème 6.** [20] *L'ensemble de structures projectives sur la surface de Riemann compacte de genre  $g > 0$  est paramétré par  $3g - 3$ -espaces vectoriels complexes  $H^0(C, K_C^{\otimes 2})$*

L'introduction des  $n$  points singuliers  $t_i$  change la dimension complexe de l'espace de paramètres de  $F(C^*)$ , alors elle devient  $3g - 3 + n$ . On est intéressé par les solutions algébriques des équations différentielles Fuchiennes suivantes :

- de types déformations isomonodromiques ( $g = 0, n = 5$ ) ; ( $g = 2, n = 0$ ) et ( $g = 2, n = 2$ ),
- de types rigides ( $g = 0, n = 3$ ).

L'ensemble  $F(C^*)$  peut être vu comme un fibré vectoriel complexe de dimension  $6g - 6 + n$  au dessus de  $C^*$ .

Trouvons maintenant la dimension de l'espace de paramètres  $\mathcal{R}(C^*)$ , on considère l'ensemble

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  les générateurs du groupe fondamentale  $\pi_1(C^*)$ . Ils satisfont la relation suivante

$$[\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] \cdot \dots \cdot [\alpha_g, \beta_g] = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_n;$$

où les  $[\alpha_i, \beta_i]$  sont les commutateurs, les monodromies associées à ces générateurs s'écrivent la relation :

$$[\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\beta_1}] \cdot [\varphi_{\alpha_2}, \varphi_{\beta_2}] \cdot \dots \cdot [\varphi_{\alpha_g}, \varphi_{\beta_g}] = \varphi_{\gamma_1} \cdot \varphi_{\gamma_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{\gamma_n}$$

chaque  $\varphi_{\gamma_i}$  est conjuguée dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  à  $z \mapsto e^{i\theta_i} z$  ou à  $z \mapsto z + 1$  pour  $\theta_i \in \mathbb{Z}$ . Les  $\theta_i$  sont les valeurs propres de structures projectives Fuchsiennes autour de chaque pointés  $t_i$  de  $C$ . On ne s'intéressera qu'à monodromie linéaire ( $\theta_i \notin \mathbb{Z}$ , la monodromie est irréductible). Autour de chaque points singuliers  $t_i$  de l'équation Fuchsienne, la représentation de monodromie est engendrée par le  $n^{uple}$   $\gamma_i \mapsto (\varphi_{\gamma_1}^i, \varphi_{\gamma_2}^i, \dots, \varphi_{\gamma_n}^i)$  de monodromies locales qu'ils satisfont la relation ci-dessus. L'ensemble de représentation  $\mathcal{R}(C^*)$  forme une variété différentielle complexe de dimension  $6g - 6 + n$ . On peut dire que l'espace de l'ensemble de représentations est également paramétrisé par un espace vectoriel complexe de dimension  $3g - 3 + n$ .

L'application de monodromie  $\Pi$  peut construire localement comme une application continue holomorphe entre les ouverts de  $\mathbb{C}^{6g-6+n}$ .

Considérons maintenant la développante  $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{P}^1$  de la structure projective Fuchsienne et son graphe  $\{(z, f(z), u \in \tilde{U}) \subset C \times \mathbb{P}^1$ . On rappelle que le groupe fondamental  $\pi_1(C^*)$  agit naturellement sur le revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $C^*$ . Cette action est également libre, propre et discontinu sur  $\tilde{U} \times \mathbb{P}^1$  par la relation suivante pour tout  $\gamma_i$  tel que  $\gamma_i : (z, u) \mapsto (\gamma_i \cdot z, f_{\gamma_i}(u))$ . En passant au quotient  $E = \tilde{U} \times \mathbb{P}^1 / \pi_1(C^*)$  on définit un  $\mathbb{P}^1$ -fibré au dessus de  $C^*$  par la projection  $\pi : E \rightarrow C^*$  et sa section  $\sigma : C^* \rightarrow E$  est donnée par le graphe de  $f$ . On peut dire que le feuilletage  $\mathcal{F}$  horizontal défini sur  $E$  transverse à toutes les fibres du fibré sauf les fibres qui sont au dessus des pointés de  $C^*$ . Ces fibres sont invariantes par feuilletage  $\mathcal{F}$ , les points singuliers du feuilletage sont les pointés  $S := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  de  $C$ .

On considère le triplet  $(E, \mathcal{F}, \sigma)$  où  $E$  est le  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : E \rightarrow C^*$  au dessus de la surface de Riemann  $C^*$  (courbe complexe) de genre  $g$  avec  $n$  trous,  $\mathcal{F}$  le feuilletage définie sur  $E$  par la structure projective Fuchsienne et  $\sigma$  est la section du fibré  $\sigma : C \rightarrow E$ . Sur chaque cartes  $f_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$  de surface de Riemann compacte  $C$  on définit  $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{P}^1$  des trivialisations locales, les fonctions de transitions au dessus de chaque  $U_i \cap U_j$  sont donnés par  $\Phi_{i,j} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^1; (z, u_i) \mapsto (z, \rho_{i,j}(u_i))$ ,  $\rho_{i,j} \in \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ ; cela définit un faisceau de groupe  $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O})$  sur  $C$ . Alors on peut définir  $E$  comme la collection  $(\rho_{i,j})_{i,j \in I} \in H^1(2, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}))$ . La surface définie par le fibré  $E$  est appelé surface réglée  $S$ . Par exemple la surface réglée  $S$  définie par  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $E$  au dessus d'une sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  i.e  $C = \mathbb{P}^1$ , est la surface de Hirzebruck ([34])  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  est le nombre d'auto-intersection de section  $\sigma_{-k}$ . Rappelons que  $k$  est le nombre d'auto-intersection minimale de section de la surface  $S - k := \min\{\sigma \cdot \sigma; \sigma : C \rightarrow E\}$ , est l'invariant topologique de la surface. Sur une surface de genre 2, toute section irréductible de la surfaces  $S$  a d'auto-intersection  $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  de dimension  $\{0, 1, 2, 3, 3\}$ . Si on choisit génériquement une surface de Riemann compacte de genre  $g$ ,

d'après M. NAGATA [39] et M. F. ATIYAH [1], il existe une section  $\sigma_{-k}$  irréductible d'auto-intersection  $2g - 2 \leq -k \leq g$ .

Deux surfaces réglées  $S$  et  $\tilde{S}$  sont dites équivalentes s'il existe une transformation élémentaire  $\phi : S \dashrightarrow \tilde{S}$  telle qu'elle est invariante par la projection sur la courbe complexe i.e  $\pi = \tilde{\pi} \circ \phi$ . Une transformation élémentaire est une transformation birationnelle. Il s'agit une transformation birationnelle d'une surface à une autre, par exemple la surface de Hirzebruck  $\mathbb{P}_k$  est obtenue après  $k$  transformations élémentaires au point  $a$  de section  $\sigma_0$  (courbe complexe lisse) d'auto-intersection 0. Nous pouvons dire autrement que nous avons fait éclatement au point  $a$ , l'auto-intersection de l'éclaté stricte  $\tilde{\sigma}$  est définie par :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}.\tilde{\sigma} = \sigma.\sigma + k & \text{si } k \notin \sigma \\ \tilde{\sigma}.\tilde{\sigma} = \sigma.\sigma - k & \text{si } k \in \sigma \end{cases}$$

Soit  $E$  un  $\mathbb{P}^1$ -fibré,  $a$  un point d'ordre  $\nu$  sur la section  $\sigma$ . On fait une transformation élémentaire en  $a$ ; en effet on considère seulement la carte  $U_i \times \mathbb{P}^1$  qui contient le point  $a$  et on ignore les autres cartes car elles seront invariantes par l'éclatement en  $a$ . Supposons que  $a = (0, 0)$  alors la transformation élémentaire

$$\begin{aligned} \phi_1 : U_i \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \widetilde{U}_i \times \mathbb{P}^1 \\ (z, u) &\mapsto (z, \tilde{u} = \frac{u}{z}) \end{aligned}$$

en  $a$  dans cette carte. Après l'éclatement la section stricte du nouveau  $\mathbb{P}^1$ -fibré a d'auto-intersection  $\nu - 1$ . On se place à nouveau dans la carte  $\widetilde{U}_i \times \mathbb{P}^1$  de  $\tilde{E}$  pour le second éclatement en  $a$ ,

$$\begin{aligned} \phi_2 : \widetilde{U}_i \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \widetilde{\widetilde{U}_i} \times \mathbb{P}^1 \\ (z, \tilde{u}) &\mapsto (z, \frac{\tilde{u}}{z}) \end{aligned} .$$

Cette seconde transformation birationnelle se compose avec la précédente i.e  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ , on a un autre nouveau  $\mathbb{P}^1$ -fibré après cet éclatement de section d'auto-intersection  $\nu - 2$ , ainsi de suite après  $\nu$  éclatements avec transformation élémentaire  $\phi = \phi_\nu \circ \phi_{\nu-1} \cdots \circ \phi_2 \circ \phi_1$ , nous obtenons un  $\mathbb{P}^1$ -fibré de section stricte d'auto-intersection 0 qui est globalement définie sur la courbe complexe  $C$  de genre  $g$ . En conséquent le  $\mathbb{P}^1$ -fibré devient trivial.

**Théorème 7.** *Toute transformation birationnelle (méromorphe) est une composition finie de transformation élémentaires et holomorphes.*

Du point de vue homologique  $H_2(E, \mathbb{Z})$  est engendré par  $[\sigma]$  et par  $[f]$ , avec  $[\sigma]$  et  $[f]$  sont respectivement de classe d'équivalence de sections et de classe d'équivalence de fibres de  $E$ . Si on suppose  $\sigma_{-k}$  une section de base de  $E$  d'auto-intersection  $-k$ , toute autre section  $\sigma$  de  $E$  dans  $H_2(E, \mathbb{Z})$  s'écrit  $[\sigma] = m[\sigma_{-k}] + n[f]$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $m$  est toujours à 1 et  $\sigma.f = 1$ . Pour vérifier que  $m = 1$ , on pose pour toute section  $\sigma$  de  $S$ ,  $\sigma.f = 1 \Leftrightarrow \sigma.(m.\sigma_{-k} + f) = 1$ . On a  $m\sigma_{-k}.f + n.f.f = 1$ , on sait que  $f.f = 0$  donc  $m = 1$ . Si  $\sigma$  et  $\sigma_{-k}$  sont distinctes et  $k \geq 0$  alors  $\sigma.\sigma_{-k} \geq \sigma_{-k}.\sigma_{-k}$ . C'est le cas ou le  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $E$  est réductible. Si l'auto-intersection  $k$  est négative alors  $\sigma.\sigma \geq 0$  : il y a au plus une section holomorphe avec auto-intersection négative. Le nombre d'intersection

des sections holomorphes sont soit toutes paires ou soit toutes impaires :  $k \bmod 2$  est l'invariant topologique du fibré  $E$ , i.e au cour de la déformation  $k \in \{0, 1\}$ .

Nous revenons à l'application de monodromie :

**Théorème 8.** *Étant donné deux feuilletages  $(E, \mathcal{F})$  et  $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{F}})$  ayant la même représentation de monodromie. Alors il existe un isomorphisme  $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$  commute avec la projection sur  $C^*$  si et seulement s'ils ont la même représentation de monodromie à conjugaison près dans  $PGL(2, \mathbb{C})$ , aucune monodromie n'a d'ordre inférieur ou égal 2 et ils conjuguent les feuilletages.*

*Proof.* Soient  $(\pi : E \rightarrow C^*, \mathcal{F})$  et  $(\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow C^*, \tilde{\mathcal{F}})$  deux  $\mathbb{P}^1$ -fibrés feuilletés. Choisissons un point  $a_0$  dans  $C^*$  qui est encore régulier pour  $\mathcal{F}$  et pour  $\tilde{\mathcal{F}}$ , on peut avoir un isomorphisme local  $\phi : \pi_1^{-1}(a_0) \rightarrow \tilde{\pi}_1^{-1}(a_0)$  donne la même représentation de monodromie, envoie un point  $p = (z, u)$  à unique point  $p' = (z, \tilde{u})$ . Les feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\tilde{\mathcal{F}}$  définis sur ces points par  $\frac{du}{dz} = 0$  et par  $\frac{d\tilde{u}}{dz} = 0$  sont horizontaux. Autour de  $a_0$  on peut prolonger uniformément l'application  $\phi_0 : (0, u) \mapsto (0, \varphi_0(u))$  à l'application  $\phi : (z, u) \mapsto (z, \varphi_0(u))$  conjugue le feuilletage  $\mathcal{F}$  à  $\tilde{\mathcal{F}}$ . On fait cela de carte à carte de  $C^*$ , on arrive à un isomorphisme global de  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$  au dessus de la surface totale de  $C^*$  conjuguant le feuilletage  $\mathcal{F}$  à  $\tilde{\mathcal{F}}$  et satisfait  $\tilde{\pi} \circ \phi = \pi$ . Et la monodromie locale  $\varphi$  autour des singularités est conjuguée à  $u \mapsto e^{2\pi i \theta_i} u$   $\square$

On constate que même si on introduit des singularités, l'application de Riemann-Hilbert reste localement injective.

**Théorème 9.** *Soit  $\rho \in \mathcal{R}(C^*)$  une représentation de monodromie, alors il existe au moins un couple  $(S, \mathcal{F})$  où  $S$  est la surface réglée et  $\mathcal{F}$  le feuilletage dont sa monodromie est  $\rho$ .*

*Proof.* voir ([34])  $\square$

Le théorème (8) et (9) prouve que l'application de Hilbert-Riemann est localement bijective.

On remarque que :

- La monodromie caractérise la structure projective,
- Toute perturbation de la monodromie est la monodromie d'une perturbation de la structure projective.



## Chapter 2

# Classification pour les systèmes de Garnier $(g, n) = (0, n)$

Dans ce chapitre, nous classifions toutes les constructions à la méthode de Kitaev  $\phi_t^*(E)$  permettant de construire une solution algébrique (complète) non élémentaire d'un système de Garnier pour  $n \geq 5$  pôles, c'est à dire à  $N \geq 2$  paramètres. Nous introduisons tout d'abord les structures orbifoldes associées et sous-jacentes à une équation fuchsienne. Ceci nous permet d'avoir une version raffinée de la formule de Riemann Hurwitz qui nous permet rapidement de montrer que  $E$  doit être hypergéométrique. Ensuite, on arrive à borner le degré et ou les exposants et enfin à lister tous les cas possibles. On regarde aussi le cas des solutions élémentaires à monodromie réductible infinie : là, il y a une infinité de constructions possibles ; on les classe pour  $n = 5$  et  $6$ .

### 2.1 Structure orbifold sous-jacente à une équation fuchsienne $E$

#### 2.1.1 Structure orbifold formelle

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Une structure orbifold formelle sur  $X$  est la donnée d'une famille finie  $\{(t_i, p_i)\}_{i=1, \dots, n}$  telle que

- $t_1, \dots, t_n \in X$  sont des points deux à deux distincts de  $X$ ,
- $p_1, \dots, p_n \in \{2, 3, 4, 5, \dots, +\infty\}$  sont des poids.

On peut encore la définir par une application

$$p : X \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$$

qui vaut 1 sauf pour un nombre fini de points, ici  $\{t_1, \dots, t_n\}$ , son support. On aura aussi à considérer des structures orbifoldes généralisées où cette fois

$$p : X \rightarrow \mathbb{Q}_+^* \cup \{\infty\}$$

(valant 1 sauf pour un nombre fini de points). Pour éviter toute confusion, on parlera de structure orbifold entière concernant la première notion.

On définit la caractéristique d'Euler de la courbe orbifold  $\chi(X, p)$  par

$$\chi(X, p) := 2 - 2g + \sum_{t \in X} \left( \frac{1}{p(t)} - 1 \right) = 2 - 2g - n + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

où  $g = g(X)$  est le genre de la courbe  $X$ . Lorsque  $p$  est à valeurs dans  $\{1, \infty\}$ , on retrouve la caractéristique d'Euler classique de la courbe épointée  $X \setminus \{p = \infty\}$ .

Si  $\phi : Y \rightarrow X$  est un revêtement ramifié entre deux surfaces de Riemann compactes et si  $p : X \rightarrow \mathbb{Q}_+^* \cup \{\infty\}$  est une structure orbifold sur  $X$ , alors on définit le pull-back  $\phi^*p$  par

$$\phi^*p(t) := \frac{p(\phi(t))}{\text{Ind}_\phi(t)} \quad \text{pour tout } t \in Y$$

où  $\text{Ind}_\phi(t)$  est l'indice de  $\phi$  en  $t$ , i.e.  $\text{Ind}_\phi(t) = k$  si  $\phi(z) = z^k$  pour des coordonnées locales adéquates. Par exemple, si  $p$  est la structure triviale  $p \equiv 1$  sur  $X$ , alors  $\phi^*p = \text{Ind}_\phi$ , la fonction indiciale.

**Proposition 3** (Riemann-Hurwitz version orbifold). *Si  $\phi : Y \rightarrow X$  est un revêtement ramifié de degré  $d$ , alors  $\chi(Y, \phi^*p) = d \cdot \chi(X, p)$ .*

Si  $p$  et  $p'$  sont deux structures orbifolles sur  $X$ , on dira que  $p$  est inférieure à  $p'$  et on notera  $p \leq p'$  lorsque  $p(t) \leq p'(t)$  pour tout  $t \in X$  (ici,  $\infty = +\infty$  est un infiniement grand). On vérifie immédiatement que

$$p \leq p' \quad \Rightarrow \quad \chi(X, p) \geq \chi(X, p').$$

(Attention au renversement d'inégalités !) On définit la structure orbifold entière sous-jacente  $\underline{p}$  à une structure orbifold généralisée

$$p : X \rightarrow \mathbb{Q}_+^* \cup \{\infty\}$$

par

- si  $p(t) = \frac{n}{q} \neq \infty$  alors  $\underline{p}(t) = n$  où  $(n, q) = 1$  ;
- si  $p(t) = \infty$  alors  $\underline{p}(t) = \infty$ .

Autrement dit,  $\underline{p}(t)$  est le plus petit multiple entier de  $p(t)$  ; en particulier, on a

$$p(t) \leq \underline{p}(t).$$

Avant de voir le lien avec les équations fuchsiennes, rappelons le contexte géométrique dans lequel les structures orbifolles apparaissent naturellement.

### 2.1.2 Structure orbifold métrique et uniformisation

Considérons un groupe fuchsien  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  de type fini agissant proprement discontinument (par isométries) sur le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$ . Supposons en outre  $\Gamma$  de co-volume fini, de sorte que  $\mathbb{H}/\Gamma$  est une surface de Riemann compacte à laquelle on a enlevé un nombre fini de points. Notons  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma \subset X$ . La fonction indicielle  $\mathrm{Ind}_\phi$  est constante sur les fibres de  $\phi$  et on définit une structure orbifold (entière) sur la courbe  $X$  en posant

- $p(\phi(w)) := \mathrm{Ind}_\phi(w)$  pour tout  $w \in \mathbb{H}$ ,
- $p(t) = \infty$  si  $t \in X \setminus (\mathbb{H}/\Gamma)$ .

Le support de  $p$  est précisément la réunion des valeurs critiques de  $\phi$  et des pointes. Par construction,  $\phi^*p$  (qui se définit localement comme dans la section précédente) est la structure orbifold triviale sur  $\mathbb{H}$ . La métrique de Poincaré  $\mu$  sur  $\mathbb{H}$  descend sur la courbe  $X$  en une métrique singulière (à courbure constante  $-1$  là où elle est lisse). Le support de la structure orbifold  $p$  est précisément la réunion des points singuliers de la métrique : l'angle de la surface  $X$  autour d'un de ses points  $t$  est donné par  $\frac{2\pi}{p(t)}$ . Rappelons enfin la formule de Gauss-Bonnet dans ce cadre

$$\mathrm{Aire}(X, \mu) = -2\pi\chi(X, p).$$

On définit de la même manière la structure orbifold d'un quotient de la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  par un groupe fini d'isométries pour sa métrique à courbure constante  $+1$  et on a (attention au signe)

$$\mathrm{Aire}(X, \mu) = 2\pi\chi(X, p).$$

On peut enfin considérer les quotients du plan  $\mathbb{C}$  par un groupe d'isométries euclidiennes, mais la caractéristique d'Euler  $\chi(X, p)$  ne caractérise plus l'aire.

**Théorème 10** (Klein-Poincaré). *Une surface de Riemann compacte munie d'une structure orbifold entière  $(X, p)$  est uniformisable, c'est à dire correspond à un des quotients décrits au dessus, si et seulement si on n'est pas dans l'une des situations suivantes :*

- $\mathrm{genre}(X) = 0$  et  $\mathrm{support}(p) = \{t\}$  avec  $p(t) < \infty$  ;
- $\mathrm{genre}(X) = 0$  et  $\mathrm{support}(p) = \{t_1, t_2\}$  avec  $p(t_1) \neq p(t_2)$ .

*De plus, une orbifold uniformisable est à courbure  $> 0$  (resp.  $= 0$  ou  $< 0$ ) si et seulement si  $\chi(X, p) > 0$  (resp.  $= 0$  ou  $< 0$ ).*

On en déduit la liste des orbifolds uniformisables à courbure  $> 0$  :

- $\mathrm{genre}(X) = 0$  et  $\mathrm{support}(p) = \emptyset$ ,
- $\mathrm{genre}(X) = 0$  et  $\mathrm{support}(p) = \{t_1, t_2\}$  avec  $p(t_1) = p(t_2) < \infty$ ,



- $\text{genre}(X) = 0$  et  $\text{support}(p) = \{t_1, t_2, t_3\}$  où  $p$  prend les valeurs :

$$(2, 2, k), \quad k < \infty, \quad (2, 3, 3), \quad (2, 3, 4), \quad \text{ou} \quad (2, 3, 5) ;$$

ainsi que celles de courbure nulle :

- $\text{genre}(X) = 0$  et  $\text{support}(p) = \{t\}$  avec  $p(t) = \infty$ ,
- $\text{genre}(X) = 0$  et  $\text{support}(p) = \{t_1, t_2\}$  avec  $p(t_1) = p(t_2) = \infty$ ,
- $\text{genre}(X) = 0$  et  $\text{support}(p) = \{t_1, t_2, t_3\}$  où  $p$  prend les valeurs

$$(2, 2, \infty), \quad (2, 3, 6), \quad (2, 4, 4), \quad \text{ou} \quad (3, 3, 3),$$

- $\text{genre}(X) = 0$  et  $\text{support}(p) = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  où  $p$  prend les valeurs  $(2, 2, 2, 2)$ ,
- $\text{genre}(X) = 1$  et  $\text{support}(p) = \emptyset$ .

Rappelons que les aires  $-2\pi\chi$  d'orbifoldes (uniformisables) hyperboliques ne sont pas arbitrairement petites, mais bornées inférieurement par l'aire  $\frac{\pi}{21}$  de l'orbifold hypergéométrique  $(2, 3, 7)$ . Nous listons ci-dessous les orbifoldes d'aire  $\leq \frac{\pi}{3}$  (c'est à dire pour lesquelles  $-\chi \geq \frac{1}{6}$ , on oublie systématiquement le facteur  $2\pi$ ) ; elles sont toutes hypergéométriques sauf une, de genre  $g = 0$  avec  $n = 4$  points orbifoldes.

$(2, 3, p)$	$(2, 3, 7)$	$(2, 3, 8)$	$(2, 3, 9)$	$(2, 3, 10)$	$(2, 3, 11)$	$(2, 3, 12)$	$\dots$	$(2, 3, \infty)$
$-\chi = \frac{p-6}{6p}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{1}{12}$	$\dots$	$\frac{1}{6}$
$(2, 4, p)$	$(2, 4, 5)$	$(2, 4, 6)$	$(2, 4, 7)$	$(2, 4, 8)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$(2, 4, \infty)$
$-\chi = \frac{p-4}{4p}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{8}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\frac{1}{4}$
$(2, 5, p)$	$(2, 5, 5)$	$(2, 5, 6)$	$(2, 5, 7)$	$\dots$	$\dots$	$(2, 5, \infty)$		$(2, 6, 6)$
$-\chi$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{70}$	$\dots$	$\dots$	$\frac{3}{10}$		$\frac{1}{6}$
$(3, 3, p)$	$(3, 3, 4)$	$(3, 3, 5)$	$(3, 3, 6)$	$\dots$	$(3, 3, \infty)$		$(3, 4, 4)$	$(2, 2, 2, 3)$
$-\chi = \frac{p-3}{3p}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\dots$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Enfin,  $-\chi$  est minoré en fonction du genre  $g$  et du nombre  $n$  de points orbifoldes :

$(g, n)$	$(0, 3)$	$(0, 4)$	$(0, 5)$	$(0, 6)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 0)$
$-\chi \geq$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	2

### 2.1.3 Structure orbifold et équations fuchsiennes

Soit  $E$  une équation fuchsienne sur  $X$ . On définit la structure orbifold de  $E$  (ou plutôt de la structure projective induite par  $E$  sur  $X$ ) de la manière suivante.

- $p(t) = 1$  si  $t \in X$  est un point régulier (i.e. non singulier) de l'équation  $E$  ;
- $p(t) = \frac{1}{|\theta|} \in \mathbb{Q}^+$  si  $t \in X$  est un point singulier de l'équation  $E$  d'exposant  $\theta \in \mathbb{Q}$  non logarithmique (c'est-à-dire à monodromie périodique) ;
- $p(t) = \infty$  sinon ( $t \in X$  est un point singulier de l'équation  $E$  d'exposant  $\theta \notin \mathbb{Q}$ , ou encore un point singulier logarithmique d'exposant  $\theta \in \mathbb{Z}$ ).

On notera  $p(E)$  cette structure orbifold. On a alors

**Proposition 4.** *Si  $E$  une équation fuchsienne sur  $X$  et  $\phi : Y \rightarrow X$  un revêtement ramifié de degré  $d$ , alors*

$$p(\phi^*E) = \phi^*p(E).$$

La structure orbifold sous-jacente  $\underline{p}(E)$  ne dépend que de la monodromie de  $E$  :

- si  $t \in X$  est un point régulier (i.e. non singulier) de l'équation  $E$ , alors  $\underline{p}(t) = 1$  ;
- si  $t \in X$  est un point singulier de l'équation  $E$ , alors  $\underline{p}(t) \in \{2, 3, 4, 5, \dots, +\infty\}$  est l'ordre de la monodromie locale autour de  $t$ .

Nous observons que la structure orbifold sous-jacente est invariante par transformations birationnelles sur l'équation. Par exemple,  $\underline{p}(t) = 1$  si  $t$  est une singularité apparente.

**Proposition 5.** *Si  $E$  une équation fuchsienne sur  $X$  et  $\phi : Y \rightarrow X$  un revêtement ramifié de degré  $d$ , alors*

$$\underline{p}(\phi^*E) \geq \phi^*\underline{p}(E).$$

En particulier,  $\chi(Y, \underline{p}(\phi^*E)) \leq d \cdot \chi(X, \underline{p}(E))$ .

Si une orbifold entière  $(X, p)$  est uniformisable, i.e. définie par un revêtement ramifié  $\phi : U \rightarrow X$ ,  $U = \mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , alors la dérivée schwarzienne de  $\phi^{-1}$  (qui ne dépend pas de la détermination choisie) définit une équation fuchsienne

$$E : u'' + \frac{S(\phi^{-1})}{2}u = 0$$

sur  $X$  dont la structure orbifold est précisément  $p$ . Par exemple, on a

- si  $X = \mathbb{P}^1$  et  $\text{support}(p) = \{0, 1, \infty\}$ , alors  $E$  est l'équation hypergéométrique ;
- si  $X = \mathbb{P}^1$  et  $\#\text{support}(p) = 4$ , alors  $E$  est l'équation de Heun ;
- si  $X$  est une courbe elliptique et  $\#\text{support}(p) = 1$ , alors  $E$  est l'équation de Lamé.

Le résultat principal de cette section est la

**Proposition 6.** *Soit  $E$  une équation fuchsienne sur  $X$  dont la monodromie est non élémentaire, i.e. à image Zariski dense dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ . Alors sa structure orbifold entière sous-jacente  $(X, \underline{p})$  est une orbifold uniformisable hyperbolique.*

*Proof.* Il suffit de montrer que si la structure orbifold sous-jacente (qui est entière) n'est pas uniformisable ou n'est pas hyperbolique, alors l'équation fuchsienne  $E$  est élémentaire. Rappelons que par transformation de jauge birationnelle, on peut ramener tous les exposants rationnels de  $E$  dans l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  sous l'action du groupe  $\langle -\theta, \theta + 1 \rangle$ , sauf peut-être un que l'on peut ramener dans l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$  (sous le même groupe). Compte-tenu des listes au dessus, on doit donc en outre considérer les cas hypergéométriques  $(g, n) = (0, 3)$  avec exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{l}{k})$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5})$  et  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Mais tous ces triplets sont dans la liste de Schwarz des hypergéométriques à monodromie finie, donc élémentaires eux aussi.  $\square$

### 2.1.4 Conséquences

On cherche à classier les couples  $(E, \phi)$  où  $E$  est une équation fuchsienne sur une surface de Riemann  $X$  et  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement ramifié (fini) tels que

- la monodromie de  $E$  est non élémentaire,
- $\phi$  ramifie au dessus de  $N \geq 3\tilde{g} - 3 + \tilde{n}$  points distincts entre eux et distincts des singularités non apparentes de  $E$

où  $\tilde{g}$  est le genre de  $\tilde{X}$  et  $\tilde{n}$  le nombre de singularités non apparentes de  $\tilde{E}$ .

La dernière condition nous assure que  $\phi$  peut se déformer avec  $N$  paramètres indépendants, c'est à dire au moins la dimension de déformation isomonodromique de  $\tilde{E}$  (dimension de l'espace de Teichmüller). On déduit de la section précédente les restrictions suivantes

**Proposition 7.** *Sous les hypothèses ci-dessus, on a  $g(X) = g(\tilde{X}) = 0$  et on est dans l'un des cas suivants*

- $E$  a 3 singularités non apparentes et  $\deg(\phi) \leq 42$ ,
- $E$  a 4 singularités non apparentes et  $\deg(\phi) \leq 6$ ,
- $E$  a 5 singularités non apparentes et  $\deg(\phi) \leq 2$ .

*Proof.* On a (en supposant au pire des cas  $\tilde{p}_1 = \dots = \tilde{p}_{\tilde{n}} = \infty$  pour la structure orbifold de  $\tilde{E}$ )

$$-\chi(\phi^*E) \geq 2\tilde{g} - 2 + \tilde{n} - N \geq 1 - \tilde{g},$$

et par ailleurs

$$\chi(\phi^*E) = \deg(\phi) \cdot \chi(E).$$

Puisque l'on veut une déformation non élémentaire, on veut  $\chi(E) < 0$  ; donc  $\tilde{g} = 0$  (et donc  $g = 0$  aussi) et

$$-\deg(\phi) \cdot \chi(E) \leq 1.$$

Évidemment,  $\deg(\phi) \geq 2$  (sinon on n'a pas de déformation) et il vient

$$-\chi(E) \leq \frac{1}{2}.$$

Maintenant, étant donné un couple  $(E, \phi)$  satisfaisant aux 3 conditions précédentes, on considère la structure orbifold sous-jacente, puis l'équation fuchsienne uniformisante correspondante  $E'$ . Alors  $(E', \phi)$  satisfait les mêmes conditions que  $(E, \phi)$ . Par ailleurs, si  $E'$  satisfait les conclusions de la proposition, il en va de même de  $(E, \phi)$ . Donc on suppose dans la suite  $E$  uniformisante. On conclut avec les estimations de la section précédente.  $\square$

Les estimations obtenues sont encore très grossières. Examinons en détail les cas où  $E$  a 4 ou 5 singularités non apparentes.

**Proposition 8.** *Sous les hypothèses précédentes,  $E$  a au plus 3 singularités.*

*Proof.* Comme dans la preuve de la précédente proposition, on suppose sans perte de généralité  $E$  uniformisante et hyperbolique. Si  $n = n(E) = 4$ , soit  $p$  le maximum de sa structure orbifold :

$$-\chi(E) \geq \left( -2 + \sum_1^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right).$$

Alors  $p$  borne la structure orbifold de  $\tilde{E} = \phi^* E$  et on a

$$-\chi(\tilde{E}) \leq \left( -2 + \sum_1^{\tilde{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - (\tilde{n} - 3) \right) = 1 - \frac{\tilde{n}}{p}.$$

Il vient

$$d \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \leq 1 - \frac{\tilde{n}}{p}$$

et donc

$$d \leq 2 \frac{p - \tilde{n}}{p - 2}.$$

Bien sûr, on veut  $\tilde{n} > 3$  et  $d > 1$  pour obtenir une déformation non triviale ; la seule possibilité reste donc  $p = \infty$  et  $d = 2$ . On vérifie aisément qu'il n'y a pas de déformation complète dans ce cas. Avec des arguments similaires, on exclut le cas  $n = 5$ .  $\square$

## 2.2 Solutions algébriques non élémentaires pour $(g, n) = (0, 5)$

Ici, on suppose que  $E$  est hypergéométrique, uniformisante hyperbolique, avec 3 pôles en  $x = 0, 1, \infty$ , que  $\tilde{E} = \phi^* E$  a exactement 5 singularités non apparentes et que

$$\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

de degré  $d = \deg(\phi)$  ramifie au dessus de 2 points distincts des pôles de  $E$ .

**Proposition 9.** *Sous les hypothèses précédentes, notons  $(p_0, p_1, p_\infty)$  la structure orbifold de  $E$ , avec  $2 \leq p_0 \leq p_1 \leq p_\infty \leq \infty$  et  $d := \deg(\phi)$ . Alors on a*

$$d \left( 1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_\infty} \right) \leq 1 - \frac{5}{p_\infty}. \quad (2.1)$$

*Proof.* Si on note  $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \tilde{p}_5)$  la structure orbifold sous-jacente de  $\tilde{E}$ , avec  $2 \leq \tilde{p}_1 \leq \tilde{p}_2 \leq \tilde{p}_3 \leq \tilde{p}_4 \leq \tilde{p}_5 \leq \infty$ , alors on a  $\tilde{p}_5 \leq p_\infty$  : les singularités non apparentes en haut proviennent de celles d'en bas ; leurs exposants sont des multiples de ceux d'en bas. On a ainsi

$$-\chi(\tilde{E}) \leq 2\tilde{g} - 2 + \sum_{i=1}^5 \left( 1 - \frac{1}{\tilde{p}_i} \right) - 2 = 1 - \frac{1}{\tilde{p}_1} - \frac{1}{\tilde{p}_2} - \frac{1}{\tilde{p}_3} - \frac{1}{\tilde{p}_4} - \frac{1}{\tilde{p}_5} \leq 1 - \frac{5}{p_\infty}.$$

Par ailleurs

$$d \left( 1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_\infty} \right) = -d \cdot \chi(E) \leq -\chi(\tilde{E})$$

d'où l'inégalité (2.1). □

**Proposition 10.** *On est toujours sous les hypothèses précédentes.*

1. *On a l'égalité suivante :*

$$d - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor = 1 \quad (2.2)$$

où  $\lfloor \rfloor$  désigne la partie entière.

2. *Si  $p_0 \leq d < p_1 \leq p_\infty$  alors*

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{d} \geq 1. \quad (2.3)$$

3. *Si  $p_0 \leq p_1 \leq d < p_\infty$  alors*

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{d} \geq 1. \quad (2.4)$$

4. *Si  $p_\infty \leq d$  alors*

$$\frac{4}{5} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1. \quad (2.5)$$

*Proof.* D'après Riemann-Hurwitz,  $\phi$  possède  $2d - 2$  points de ramification comptés avec multiplicité dont 2 au moins s'envoient en dehors de  $x = 0, 1, \infty$ . Le nombre de points au dessus de  $x = 0, 1, \infty$  est donc minoré par

$$\#\phi^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \geq 3d - (2d - 2) + 2 = d + 4.$$

Le nombre de singularités apparentes de  $\tilde{E}$  au dessus de  $x = i$  est majoré par  $\lfloor \frac{d}{p_i} \rfloor$ ,  $i = 0, 1, \infty$ . Ainsi, le nombre de singularités non apparentes de  $\tilde{E}$  (c'est à dire 5) est minoré par

$$5 \geq d + 4 - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor.$$

D'un autre côté,  $\lfloor \frac{d}{p_i} \rfloor \leq \frac{d}{p_i}$  et on a

$$d + 4 - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor \geq d + 4 - \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1} - \frac{d}{p_\infty} \geq 4 + d(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_\infty}) > 4$$

( $E$  est hyperbolique) et puisque le terme de gauche est entier, on obtient

$$d + 4 - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor \geq 5$$

d'où l'égalité (2.2).

Si  $p_\infty > d$ , on a  $\lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor = 0$  et l'équation (2.2) devient  $d - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor = 1$ . On sait que  $d(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}) \leq d - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor = 1$  alors on a  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{d} \geq 1$ .

Si  $p_\infty \leq d$ , d'après l'hyperbolicité de  $E$ , on a  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1$ . On remplace  $d$  par  $p_\infty$  dans l'inégalité (2.1) et on obtient l'inégalité  $(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})p_\infty^2 - 2p_\infty + 5 \leq 0$ . Pour qu'elle admette une solution, son discriminant doit être supérieur ou égal à 0. Ainsi on a  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \geq \frac{4}{5}$ .  $\square$

**Remarque 2.** De la preuve de l'égalité (2.2), on déduit que  $\phi$  réalise nécessairement le nombre maximum possible de points singuliers apparents pour  $\tilde{E}$  au dessus de  $x = 0, 1, \infty$ . Autrement dit, au dessus de  $x = 0$  par exemple,  $\phi$  a exactement  $\lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor$  points ramifiant à l'ordre  $p_0 - 1$  (d'indice  $p_0$ ).

Examinons d'abord le cas  $d < p_\infty$ . Les inégalités (2.3) et (2.4) nous donnent les possibilités suivantes :

Triplets $(p_0, p_1, p_\infty)$	Degrés de revêtement $d$
$(2, p_1, p_\infty)$	2
$(2, 3, p_\infty)$	3, 4, 5, 6
$(2, 4, p_\infty)$	4
$(3, 3, p_\infty)$	3

Les paramètres  $p_1$  et  $p_\infty$  du tableau sont des entiers naturels suffisamment grands pour vérifier la condition d'hyperbolicité, par hypothèse  $> d$ , ou infinis. Puisque ces paramètres n'interviennent pas dans les contraintes de la construction, on peut tout aussi bien les fixer à  $\infty$ , ce que nous ferons ensuite. Dans chacun des cas, on vérifie si la condition (2.2) est satisfaite ; c'est toujours le cas sauf pour le revêtement de degré 5. En tenant compte du fait que  $\phi$  doit avoir le nombre maximal de points singuliers apparents (voir remarque précédente), on trouve la liste suivante

Triplets $(p_0, p_1, p_\infty)$	Degrés $d$	Type de ramifications	$N$
$(2, \infty, \infty)$	2	$(2; 1 + 1; 1 + 1)$	1
$(2, 3, \infty)$	3	$(2 + 1; 3; 1 + 1 + 1)$	1
	4	$(2 + 2; 3 + 1; 1 + 1 + 1 + 1)$	2
	6	$(2 + 2 + 2; 3 + 3; 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$	3
$(2, 4, \infty)$	4	$(2 + 2; 4; 1 + 1 + 1 + 1)$	1
$(3, 3, \infty)$	3	$(3; 3; 1 + 1 + 1)$	0

Par exemple, pour la ligne 3, les ramifications au dessus de  $x = 0, 1$  sont imposées et il nous reste 2 points de ramification que l'on peut choisir fixe au dessus de  $x = \infty$  ou libre ; dans chacun des cas, la condition (2.2) nous assure que la déformation est complète. On a systématiquement privilégié de maximiser le nombre de points libres dans le tableau, les autres cas de figure s'en déduisent facilement. Par exemple, toujours pour la ligne 3, on a le cas dégénéré de type Painlevé VI  $(2 + 2; 3 + 1; 2 + 1 + 1)$ . Seules les lignes 3 et 4 nous fournissent des solutions possibles pour les systèmes de Garnier avec  $N > 1$ .

Examinons maintenant le cas  $p_0 \leq p_1 \leq p_\infty \leq d$ . L'inégalité (2.5) nous dit que  $(p_0, p_1) = (2, 3)$  puis en utilisant (2.1) et le fait que  $p_\infty \leq d$ , on trouve la liste suivante

Triplets $(p_0, p_1, p_\infty)$	Degrés de revêtement $d$
$(2, 3, 7)$	7, 8, 9, 10, 11, 12
$(2, 3, 8)$	8, 9

Seul le revêtement de degré 11 ne satisfait pas l'égalité (2.2). Pour les autres, on trouve

Triplets $(p_0, p_1, p_\infty)$	Degrés $d$	Type de ramifications	$N$
$(2, 3, 7)$	7	$(2 + 2 + 2 + 1; 3 + 3 + 1; 7)$	-1
	8	$(2 + 2 + 2 + 2; 3 + 3 + 1 + 1; 7 + 1)$	0
	9	$(2 + 2 + 2 + 2 + 1; 3 + 3 + 3; 7 + 1 + 1)$	0
	10	$(2 + 2 + 2 + 2 + 2; 3 + 3 + 3 + 1; 7 + 1 + 1 + 1)$	1
	12	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{6 \text{ fois}}; 3 + 3 + 3 + 3; 7 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{5 \text{ fois}})$	2
$(2, 3, 8)$	8	$(2 + 2 + 2 + 2; 3 + 3 + 1 + 1; 8)$	-1
	9	$(2 + 2 + 2 + 2 + 1; 3 + 3 + 3; 8 + 1)$	-1

Les lignes avec  $N = -1$  correspondent à  $\tilde{n} = 2$  singularités en haut : il n'y a certainement pas de revêtement correspondant. Les lignes  $N = 0$ , lorsque le revêtement existe, vont nous donner de nouveau une équation hypergéométrique en haut. La ligne  $N = 1$  nous donne une des solutions algébriques de Painlevé VI dans la liste de Doran. La seule possibilité pour nous est la ligne 5 avec  $N = 2$ . On a démontré le

**Théorème 11.** *Si  $E$  est une équation hypergéométrique non élémentaire dont les monodromies locales sont d'ordre  $(p_0, p_1, p_\infty)$  et si  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une famille à 2 paramètres*

de revêtements ramifiés tel que  $\phi_t^*E$  a 5 singularités non apparentes, alors on est dans la liste :

Triplets $(p_0, p_1, p_\infty)$	Degrés $d$	Type de ramifications
$(2, 3, \infty)$	4	$(2 + 2; 3 + 1; 1 + 1 + 1 + 1)$
$(2, 3, \infty)$	6	$(2 + 2 + 2; 3 + 3; 2 + 1 + 1 + 1 + 1)$
$(2, 3, 7)$	12	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{6 \text{ fois}}; 3 + 3 + 3 + 3; 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$

Table 2.1: Listes Pull-back hypergéométriques

Dans le tableau,  $(p_0, p_1, p_\infty)$  désigne l'ordre local des monodromies de l'hypergéométrie  $E$  aux point singuliers 0, 1 et  $\infty$ , la seconde colonne donne le degré de  $\phi_t$  et la colonne de droite, la partition des fibres de  $\phi_t$  au dessus de 0, 1 et  $\infty$ .

**Remarque 3.** Dans ce théorème, on constate qu'il n'existe pas de pull-back à 2 paramètres libres de triangles hyperboliques  $(2, \infty, \infty)$ ,  $(2, 3, 8)$ ,  $(2, 4, p_\infty)$  et  $(3, 3, p_\infty)$  où  $p_\infty$  est un entier naturel très grand.

Les triangles hyperboliques  $(2, 3, \infty)$  et  $(2, 3, 8)$  admettent des pull-back à 1 paramètre de degrés 3 et 9 respectivement ; on a

**Pour**  $d = 3$   $(2, 3, \infty)$ ;  $(2 + 1; 1 + 1 + 1; 3)$

**Pour**  $d = 9$   $(2, 3, 8)$  ;  $(2 + 2 + 2 + 2 + 1; 3 + 3 + 1 + 1 + 1; 8 + 1)$ .

Ceci construit des solutions algébriques incomplètes.

### 2.2.1 Existence des revêtements

Le tableau des ramifications 2.1 satisfait la formule de Riemann-Hurwitz, ce qui ne suffit pas à montrer l'existence des revêtements ramifiés correspondant. Dans le dernier chapitre de la thèse, on donnera des expressions explicites pour les revêtements concernant les lignes 1 et 2 du tableau. Pour la 3ième ligne, les calculs sont trop compliqués ; on démontre l'existence comme suit. Il faut construire le revêtement topologique  $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  : il existera alors une unique structure complexe sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  rendant la flèche holomorphe, et donc rationnelle. L'existence d'un revêtement topologique se démontre en construisant une représentation

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{valeurs critiques}\}) \rightarrow \text{Perm}\{1, \dots, d\}$$

où  $d$  est le degré du revêtement : on le construit via sa monodromie. En fait, le tableau de ramification complète est

$$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{6 \text{ fois}} ; 3 + 3 + 3 + 3; 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 ; \underbrace{1 + \dots + 1}_{10 \text{ fois}} + 2 ; \underbrace{1 + \dots + 1}_{10 \text{ fois}} + 2)$$



au dessus des points critiques

$$(0, 1, \infty, \lambda_1, \lambda_2).$$

Il faut donc trouver des permutations  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty, \tau_1, \tau_2 \in \text{Perm}\{1, \dots, d\}$  conjuguées individuellement à

$$\sigma_0 \sim (12)(34)(56)(78)(9\ 10)(11\ 12), \quad \sigma_1 \sim (123)(456)(789)(10\ 11\ 12), \quad \sigma_\infty \sim (1234567)$$

$$\tau_1 \sim \tau_2 \sim (12) \quad \text{avec} \quad \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \sigma_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_2 = \text{identité}.$$

En fait, on trouve chez Doran et Kitaev une famille à 1 paramètre de revêtements ramifiés du type

$$\underbrace{(2 + \dots + 2)}_{6 \text{ fois}} ; 3 + 3 + 3 + 3 ; 7 + 2 + 1 + 1 + 1 ; \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{10 \text{ fois}} + 2)$$

C'est une sous-famille de celle que nous cherchons correspondant à une confluence : une des deux ramifications libres, disons  $\lambda_1$ , est à l'infini. Correspond alors un revêtement topologique et une représentation donnée par

$$\sigma'_0 \sim (12)(34)(56)(78)(9\ 10)(11\ 12), \quad \sigma'_1 \sim (123)(456)(789)(10\ 11\ 12), \quad \sigma'_\infty \sim (1234567)(89)$$

$$\tau'_2 \sim (12) \quad \text{avec} \quad \sigma'_0 \circ \sigma'_1 \circ \sigma'_\infty \circ \tau'_2 = \text{identité}.$$

Puisque  $(1234567)(89) = (1234567) \circ (89)$ , il est clair que l'on peut décomposer  $\sigma'_\infty = \sigma_\infty \circ \tau_1$ , ce qui montre l'existence du revêtement.

### 2.2.2 Exposants $(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_{t_1}, \tilde{\theta}_{t_2}, \tilde{\theta}_\infty)$

On a travaillé jusque maintenant avec la structure orbifold sous-jacente à l'équation  $E$ . Pour chaque type de revêtement listé dans le théorème 11, on peut choisir pour  $E$  toute équation dont la structure orbifold sous-jacente est donnée par  $(p_0, p_1, p_\infty)$ . Par exemple, si on considère la première ligne du tableau 2.1, en prenant pour  $E$  l'équation hypergéométrique d'exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta_\infty)$ ,  $\theta_\infty \in \mathbb{C}$  arbitraire, on aura après pull-back une famille isomonodromique d'équations fuchsienues avec 5 pôles non apparents d'exposants

$$(\frac{1}{3}, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty)$$

et deux pôles apparents d'exposant 2. Si, par contre, on part de l'équation hypergéométrique d'exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \theta_\infty)$ , on obtiendra alors une famille d'équations fuchsienues avec 5 pôles non apparents d'exposants

$$(\frac{2}{3}, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty)$$

et deux pôles apparents d'exposant 2. Pourtant, les deux familles ainsi obtenues sont reliées par une équivalence de jauge birationnelle. En fait, on peut voir cette équivalence en bas, sur les hypergéométriques :

$$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \theta_\infty) = (1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \theta_\infty) \sim (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta_\infty).$$

Cette équivalence de jauge se relève en une équivalence de jauge entre les deux familles isomonodromiques.

Il nous faut donc classer les équations fuchsienues pour chacune des 3 orbifolles uniformisantes donnée par le tableau 2.1 modulo équivalence de jauge birationnelle. On trouve le tableau suivant :

Degrés	Exposants de $E$	Exposants de $E'$
3	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta_\infty)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3\theta_\infty)$
4	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta_\infty)$	$(\frac{1}{3}, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty)$
6	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta_\infty)$	$(2\theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty, \theta_\infty)$
12	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{7})$	$(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ $(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7})$ $(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7})$ $(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7})$
9	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8})$	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$

Table 2.2: Exposants de l'équation  $\phi_t^* E$

## 2.3 Solutions de Garnier pour monodromies réductibles infinies

On est intéressé par le cas où la courbure de surface de Riemann est nulle c'est à dire les valeurs propres de l'équation sur cette surface satisfont la relation  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} = 1$ . D'après le théorème d'uniformisation, le revêtement universel de la surface de Riemann  $\tilde{X}_{g,n} = \mathbb{C}$  on veut dire que l'application développante (fonction de Schwarz) de l'équation Fuchsienne  $E$  est paramétrée par  $\mathbb{C}$ . Alors le revêtement universel de  $X_{g,n}$  est elliptique de genre arithmétique 1. Les triangles dont leurs angles satisfont cette égalité sont appelés triangles euclidiens, et leurs aires orbifoldes sont nulles. Si la somme des valeurs propres  $\frac{1}{p_i}$  de l'équation  $E$ , où  $i = 0, 1, \infty$ , le quatrième énoncé de la proposition (9) montre que le degré  $d$  de transformation pull-back  $\phi$  devient très grand qu'on ne pourra plus le majorer. Du fait que le degré  $d$  de revêtement  $\phi$  ne vérifie plus l'inégalité (2.1), on aura un nombre infini de type de ramification correspondant à chacun de ces triangles dûs au nombre d'infinité de  $d$ . Ces triangles  $(p_0, p_1, p_\infty)$  sont de nombre finis qu'on avait cité ci-dessus. Il s'agit les triplets :  $(2, 2, \infty)$ ,  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 4, 4)$  et  $(3, 3, 3)$ . On veut donner une liste complète de la classification de pull-back de ces triangles euclidiens à l'équation différentielle  $E'$ . Pour classer ces pull-back, certains énoncés des propositions (9) et (10) ne seront plus valables, ils ne peuvent être utilisés que si l'équation différentielle  $E$  est hypergéométrique. Mais on peut reprendre le même procédure d'obtention de l'égalité 2.2 on obtient, d'après la quatrième partie de la proposition (9), l'inégalité

$$d - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor \leq 1. \quad (2.6)$$

Cette inéquation nous permettra de sélectionner convenablement les degrés de revêtements. On suppose que les valeurs propres de l'équation Fuchsienne  $E$  fixée sur  $\mathbb{P}^1$  vérifient l'égalité  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} = 1$ ; l'équation Fuchsienne obtenue  $E' = \phi^*E$  possède sept pôles dont cinq sont des singularités essentielles de valeurs propres  $\frac{1}{p_i}$  et deux singularités apparentes de valeurs propres 2. On obtient le résultat suivant :

**Proposition 11.** *Les équations  $E$  et  $E'$  sous les hypothèses ci-dessus, alors il existe une infinité de types de ramifications de  $\phi$ , correspondants aux solutions de l'équation  $E'$ , tirant en arrière chaque triangles uniformisés par  $\mathbb{C}$  sauf les triangles  $(2, 4, 4)$  et  $(3, 3, 3)$  n'en ont pas.*

*Proof.* On suppose que le degré  $d \geq 3$  de revêtement ; et on cherche tous les degrés  $d$  et les types de revêtements tirant en arrière de l'équation d'ordre de monodromie  $(p_0, p_1, p_\infty)$ . Le revêtement  $\phi$  doit contenir  $d + 4$  points dans les trois fibres i.e ils (types de revêtements) satisfont l'équations  $N = \sum_i c_i - d - 2$  ( voir [27]) si

$$N = 2 \text{ et } \sum_{i=0,1,\infty} s_i = 5;$$

où  $s_i$  et  $c_i$  sont respectivement le nombre de points non apparent et le nombre total de points au dessus de  $i = 0, 1, \infty$ . On choisit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $k' \in \mathbb{N}$ . En cherchant à satisfaire ces équations ci-dessus, on obtient la liste des types de ramifications et les degrés correspondant :

**pour**  $(2, 2, \infty)$  on a les trois cas suivant :

1.  $s_0 = s_1 = 0, s_\infty = 5 : d = 6k ; (4 + 2 + \dots + 2; 2 + \dots + 2; 2k + 1 + 1 + 1 + 1),$
2.  $s_0 = s_1 = 0, s_\infty = 3: d = 2k + 1 ; (2 + \dots + 2 + 1; 2 + \dots + 2 + 1; (2k - 1) + 1 + 1),$
3.  $s_0 = 2, s_1 = 0, s_\infty = 3: d = 2k + 2 ; (2 + \dots + 2 + 1 + 1; 2 + \dots + 2; 2k + 1 + 1).$

**pour**  $(2, 3, 6)$  on obtient les types de ramifications suivants :

1.  $s_0 = s_1 = 0, s_\infty = 5 : d = 6k; (2 + \dots + 2; 3 + \dots + 3; 6 + \dots + 6 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1),$
2.  $s_0 = 0, s_1 = 1, s_\infty = 4: d = 6k' + 4; (2 + \dots + 2; 3 + \dots + 3 + 1; 6 + \dots + 6 + 1 + 1 + 1 + 1).$

□

## 2.4 Solutions algébriques du système de Garnier d'ordre 3

On s'intéresse maintenant au cas  $N = 3$  c'est à dire l'application  $\phi : \mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^1$  a trois points critiques libres distincts en dehors sur des valeurs critiques  $z = 0, 1$  et en  $\infty$ . Comme la section précédente elle sera définie par une famille de revêtements paramétrés par une surface rationnelle. L'équation transformée  $E' = \phi^*E$  par  $\phi$  est une équation fuchsienne avec 6 points singuliers non apparents normalisés projectivement à  $x = 0, 1, t_1, t_2, t_3, \infty$  et 3 points singuliers apparents normalisés projectivement

$x = q_1, q_2, q_3$ . Les six singularités non apparentes de  $E'$  sont des points critiques non apparents de  $\phi$ , toutes sont situées au dessus de l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ . Tous les points de ramifications de revêtement  $\phi$  se trouvent au dessus de  $z = 0, 1, \infty$  sauf 3 points de ramifications simples distincts libres  $x = q_1, q_2, q_3$ . Alors, d'après la formule de Hurwitz, l'application  $\phi$  contient  $d + 5$  points distincts sur l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ . Ces trois points critiques libres  $x = q_1(t_1, t_2, t_3)$ ,  $x = q_2(t_1, t_2, t_3)$  et  $x = q_3(t_1, t_2, t_3)$ , des fonctions algébriques en  $t_1, t_2, t_3$ , sont des solutions algébriques du système de Garnier d'ordre 3. On veut étudier la classification de ces solutions algébriques du système de Garnier de rang 3 provenant du pull-back  $\phi$  de l'équation fuchsienne  $E$  de monodromies locales  $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_\infty})$ . On commence par  $E$  équation fuchsienne hypergéométrique, i.e  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} < 1$  et le groupe de monodromie de l'équation fuchsienne  $E'$  est irréductible. On a obtenu les résultats similaires à la proposition (10) :

**Proposition 12.** Soit  $\phi : \mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^1$  une application revêtement de  $\mathbb{P}_z^1$  de degré  $d$ ,  $E$  une équation hypergéométrique fixée sur  $\mathbb{P}_z^1$  de monodromies  $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_\infty})$  tel que

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} < 1.$$

Supposons que l'équation fuchsienne obtenue  $E' = \phi^*E$  par le pull-back de l'équation  $E$  a 6 points singuliers non apparents normalisés à 0, 1,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $\infty$  d'ordres de monodromies locales autour de chacun de ces points sont respectivement  $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_{t_1}, \tilde{p}_{t_2}, \tilde{p}_{t_3}$  et  $\tilde{p}_\infty$  et 3 points singuliers apparents. Alors

1. on a l'égalité  $d - (\lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor + \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor + \lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor) = 1$ ;
2. on obtient l'inégalité  $(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_\infty})d \leq 1 - \frac{6}{p_\infty}$ ;
3. si  $p_\infty > d$  on a  $\frac{1}{d} + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \geq 1$ ;
4. si  $p_\infty \leq d$  on obtient  $(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})p_\infty^2 - 2p_\infty + 6 \leq 0$  et  $\frac{5}{6} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1$ .

*Proof.* La démonstration est le même raisonnement que celle de proposition (10), mais pour le premier énoncé il faut savoir que le nombre total des points distincts dans les trois fibres de  $\phi$  est égal à  $d + 5$  et pour le deuxième énoncé il faut aussi tenir compte que l'équation fuchsienne  $E'$  possède 6 points singuliers non apparents (points singuliers essentiels). Les deux derniers énoncés sont les déductions des deux premiers.  $\square$

On constate, dans la proposition (12), que tous les triplets hyperboliques  $(p_0, p_1, p_\infty)$  ne satisfont pas la condition du quatrième énoncé de proposition. Cela veut dire que  $d < p_\infty$  alors les points sur  $\infty$  sont des points singuliers non apparents de l'équation fuchsienne  $E'$  et les ordres de monodromie autour de ces points peuvent être égaux à l'infini. On obtient la liste des triplets  $(p_0, p_1, p_\infty)$  et ses degrés  $d$  satisfaisant la troisième condition :

- $(2, 3, p_\infty)$   $d = 2, 3, 4, 5, 6$ ;

- $(2, 4, p_\infty)$   $d = 2, 3, 4$ ;
- $(2, p_1, p_\infty)$   $d = 2$ ;
- $(3, 3, p_\infty)$   $d = 2, 3$ .

Si on applique le premier énoncé de la proposition (12) certains degrés  $d$  de l'application  $\phi$  disparaissent. On obtient à la fin la liste des triplets  $(p_0, p_1, p_\infty)$  et de degrés  $d$  satisfaisant les énoncés de la proposition (12) :

Triplets $(p_0, p_1, p_\infty)$	Degrés $d$
$(2, 3, p_\infty)$	2, 3, 4, 6
$(2, 4, p_\infty)$	2, 4
$(2, p_1, p_\infty)$	2
$(3, 3, p_\infty)$	3

Table 2.3: Triplets et Revêtements correspondants

On cherche maintenant des revêtements qui transforment l'équation hypergéométrique  $E$  à l'équation fuchsienne avec  $6 + 3$  pôles simples. Ils seront choisis parmi les éléments préliminairement sélectionnés dans le tableau (2.3), on a eu le résultat suivant.

**Théorème 12.** *Les solutions algébriques du système de Garnier d'ordre 3 avec groupe de monodromie irréductible infini (Zariski dense) sont construites par la déformation isomonodromique de l'équation fuchsienne obtenue  $E'$  par le pull-back  $\phi$  de l'équation hypergéométrique  $E$ . Alors il existe un et un seul revêtement  $\phi$  à homographie près de degré  $d$  et de type de ramification donnés par :*

Monodromies		Degré de $\phi$ $d$	Type de revêtement $(\dots; \dots; \dots)$
Équation $E$	Équation $E'$		
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta)$	$(\theta, \theta, \theta, \theta, \theta, \theta)$	6	$(2 + 2 + 2; 3 + 3; \underbrace{1 + \dots + 1}_{6 \text{ fois}})$

Table 2.4: Transformation de l'équation hypergéométrique à l'équation fuchsienne avec  $6 + 3$  singuliers.

*Proof.* D'après la proposition (12) pour tous les triplets  $(p_0, p_1, p_\infty)$  fixés sur  $\mathbb{P}_z^1$ , on a  $d < p_\infty$ . On a l'inégalité  $\frac{d-s_0}{p_0} + \frac{d-s_1}{p_1} + \frac{d-s_\infty}{p_\infty} \geq d - 1$  due à la formule de Riemann-Hurwitz [27]) où  $s_0, s_1$  et  $s_\infty$  sont le nombre de points critiques non apparents sur  $i = 0, 1$  et  $\infty$  respectivement telle que  $\sum_{i=0,1,\infty} s_i \geq 6$ . Si on fixe l'équation fuchsienne sur  $\mathbb{P}_z^1$  avec triplet  $(2, 3, p_\infty)$ . Dans le tableau (2.3) le degré maximal correspondant à ce triplet est 6 et on peut supposer que  $p_\infty \geq 7$  alors l'inégalité ci-dessus devient

$$2 \leq d \leq 6 - 15s_0 - 8s_1.$$

On a une seule possibilité sur  $s_0$  et sur  $s_1$  pour trouver une solution de l'inégalité

$$s_0 = s_1 = 0 \text{ et } s_\infty \geq 6 \Rightarrow d \leq 6.$$

Cela veut dire que tous les points critiques non-apparents sont sur  $\infty$  et les points sur 0 et sur 1 sont tous critiques apparents alors le degré  $d$  doit être multiple commun de 2 et 3. On a une seule valeur de  $d \in [2, 6]$ , que 2 et 3 lui divisent, est  $d = 6$ . On a une seule façon de partition de  $d$  au dessus de 0 et de 1 pour trouver le nombre maximal de points critiques apparents. On a sur 0 trois points critiques apparents et sur 1 deux points critiques apparents. Donc on obtient le type de ramification de  $\phi$  est donné par  $(2 + 2 + 2; 3 + 3; 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$ .

Si on considère l'équation fuchsienne  $E$  correspondante au triplet  $(2, 4, p_\infty)$  avec  $p_\infty \geq 5$ ; puisque dans le tableau (2.3) le degré maximal correspondant au triplet  $(2, 4, p_\infty)$  est  $d = 4$ ; on a l'inégalité

$$d \leq -4 - 6s_0 - s_1.$$

Alors  $d$  est majoré par un nombre entier négatif contredit du fait que  $2 \leq d < p_\infty$ . Donc il n'existe pas de revêtement  $\phi$  qui tire en arrière l'équation fuchsienne hypergéométrique  $E$ , avec paramètres  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{p_\infty})$ , à l'équation fuchsienne  $E'$ .

Pour le triplet  $(2, p, p)$ , il est associé à une seule application de degré 2. Alors quel que soit la repartition de 2 le nombre des points distincts dans les trois fibres ne vaut pas 7. Pour  $(3, 3, p_\infty)$  où  $p_\infty \geq 4$ ; pour toutes les valeurs de  $s_0$  et  $s_1$  on a  $d \leq -6 - s_0 - s_1$  cela contredit aussi  $2 \leq d < p_\infty$ .

□

#### 2.4.1 Pull-back de monodromies affines avec 6 pôles

Si l'équation fuchsienne  $E$  définie sur  $\mathbb{P}_z^1$  est affine c'est à dire tous triangles associés à l'équation  $E$  sont euclidiens. La fonction shwarzienne correspondante aux solutions de l'équation fuchsiennes  $E$  est paramétrée par le plan complexe  $\mathbb{C}$ . Le pull-back de tous les triangles euclidiens ne donne pas de déformations fuchsiennes complètes par exemple les pull-back de triplets  $(2, 4, 4)$  et  $(3, 3, 3)$ . Les solutions algébriques complètes du système de Garnier sont construites à partir de la déformation isomonodromique de l'équation fuchsienne  $E'$  obtenue par le pull-back  $\phi$  de triangles  $(2, 2, \infty)$  et  $(2, 3, 4)$ . On a obtenu les résultats suivants :

**Théorème 13.** *Si les paramètres  $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_\infty})$  de l'équation fuchsienne  $E$  sur  $\mathbb{P}_z^1$  satisfont l'équation  $\sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i} = 1$ . Alors il existe une infinite de solutions algébriques complètes du système de Garnier avec groupe de monodromie affine provenant du pull-back de triplets  $(p_0, p_1, p_\infty)$  euclidiens. Elles sont toutes sur la liste :  $k \in \mathbb{N}^*$*

Monodromies		Degrés $d$	Types de ramifications $(\dots; \dots; \dots)$
Équation $E$	Équation $E'$		
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{4\text{zeros}})$	$2k + 2$	$(1 + 1 + 2 + \dots + 2; 2 + \dots + 2; 1 + 1 + 1 + (2k - 1))$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{4\text{zeros}})$	$2k + 3$	$(1 + 2 + \dots + 2; 1 + 2 + \dots + 2; 1 + 1 + 1 + 2k)$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{6\text{fois}}, \frac{1}{6})$	$2k + 4$	$(2 + \dots + 2 + 4; 2 + \dots + 2; \underbrace{1 + \dots + 1}_{5\text{fois}} + (2k - 1))$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$	$(\underbrace{\frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6}}_{6\text{fois}})$	$6k$	$(2 + \dots + 2; 3 + \dots + 3; \underbrace{1 + \dots + 1}_{6\text{fois}} + 6 + \dots + 6)$

Table 2.5: Transformation de l'équations fuchsiennes euclidiennes

## 2.5 Système de Garnier d'ordre supérieur ou égal 4

Dans cette partie, on suppose que l'équation fuchsienne obtenue  $E'$  après la transformation par  $\phi$  possède  $n \geq 7$  points singuliers non apparents et  $m \geq 4$  singularités apparentes et l'équation fuchsienne  $E$ , de paramètre  $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_\infty})$ , conserve le même nombre de points singuliers. On veut étudier les solutions algébriques complètes de la déformation isomonodromique de l'équation fuchsienne  $E'$ . On cherche toutes les équations fuchsiennes obtenues par les pull-back de l'équation fuchsienne  $E$  dont ces paramètres  $\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_\infty}$  sont fixés. Si un tel revêtement existe, on sait que ces points critiques libres sont des solutions algébriques de déformations isomonodromiques de l'équation fuchsienne  $E'$ . Sinon on dit que le système de Garnier n'admet pas de solutions algébriques complètes. Si on suppose que l'équation fuchsienne  $E$  est hypergéométrique, on peut utiliser la proposition (12) mais le deuxième et le quatrième énoncés modifient en

**deuxième énoncé**  $(1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i})d \leq 1 - \frac{n}{p_\infty}$ ,

**quatrième énoncé**  $p_\infty \leq d$  on a  $(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})p_\infty^2 - 2p_\infty + n \leq 0$  et  $\frac{n-1}{n} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1$ .

On a observé dans la section précédente qu'à partir de  $n = 6$  le degré de revêtements existés est strictement inférieur à  $p_\infty$ . Ces nouvelles conditions ne changent pas les éléments listés dans le tableau (2.3), donnent des revêtements possibles correspondant aux triplets fixés qui peuvent transformer l'équation  $E$  à une équation fuchsienne.

**Théorème 14.** *Si  $n \geq 7$  il n'existe pas une solution algébrique complète du système de Garnier, avec groupe de monodromie irréductible, obtenue par la méthode de Kitaev.*

*Proof.* D'après la formule de Riemann-Hurwitz, on a  $\frac{d-s_0}{p_0} + \frac{d-s_1}{p_1} + \frac{d-s_\infty}{p_\infty} \geq d - 1$ , où  $s_0, s_1$  et  $s_\infty$  sont respectivement le nombre de points critiques non apparents sur 0, 1 et  $\infty$  tel que  $\sum_{i=0,1,\infty} s_i = n$ . Si on fixe le triplet  $(2, 3, p)$ , on obtient l'inégalité ci-dessus sous la forme

$$d \leq 6(7 - n) - 15s_0 - 8s_1. \quad (2.7)$$

Si  $3 \leq n \leq 6$  on obtient des solutions algébriques aux déformations de deux équations fuchsienues déjà connues et aux deux autres équations que nous avons fait en haut. Si  $n \geq 7$ , le degré  $d$  de revêtement  $\phi$  dans l'inégalité (2.7) est majorée par des entiers naturels négatifs, alors  $\phi$  n'existe pas. Cela entraîne la non existence de l'équation fuchsienne  $E'$ .

On voit qu'on ne peut plus trouver un revêtement  $\phi$  dès que  $n > 6$  et on teste les autres types :

**triplet**  $(2, 4, p)$  on a l'inégalité  $d \leq 4(5 - n) - 6s_0 - s_1$  si  $n \geq 6$ ;

**le triplet**  $(3, 3, p)$  on obtient  $d \leq 3(4 - n) - s_0 - s_1$  si  $n \geq 5$ .

□





## Chapter 3

# Autres types de pull-back : les courbes bi-elliptiques

Dans ce chapitre, nous montrerons que les équations différentielles fuchsienues scalaires sur  $\mathbb{P}^1$  avec 5+2 pôles simples (5 pôles non apparents et 2 pôles apparents) ne proviennent pas aux pull-back des équations différentielles Fuchsienues d'ordre 2 sur  $\mathbb{P}^1$  avec 4 + 1 points singuliers notée  $\mathbb{P}^1(4 + 1)$ . On garde la même notation que le chapitre précédent,  $E'$  est l'équation fuchsienne sur  $\mathbb{P}_x^1$  et  $E$  l'équation fuchsienne sur  $\mathbb{P}_z^1$ . On donne la liste de classification de Pull-Back de connexion fuchsienne de rang 2 sur  $\mathbb{P}^1 \setminus \{\text{trois points}\}$  à une connexion fuchsienne régulière de rang 1 sur une courbe de genre 2 (l'on note  $C_2$ ) avec un pôle apparent libre. Enfin, on construit explicitement un exemple de ces revêtements et son point critique.

### 3.1 Pull-Back de $\mathbb{P}^1(4 + 1)$ à $\mathbb{P}^1(5 + 2)$

Pour classer les Pull-Back de l'équation différentielle Fuchsienne  $E$  sur  $\mathbb{P}^1(4 + 1)$  à l'équation fuchsienne  $E'$  avec 5 + 2 points singuliers, on considère des polygones sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}_z^1$  qui possèdent quatre côtés, quatre sommets et quatre angles  $\frac{\pi}{p_0}, \frac{\pi}{p_1}, \frac{\pi}{p_2}, \frac{\pi}{p_3}$  où  $p_0, p_1, p_2$  et  $p_3$  sont les ordres de monodromies de l'équation fuchsienne  $E$  autour de chacun de ces sommets. Nous pouvons supposer que ces quatre sommets sont envoyés sur 0, 1,  $t$ ,  $\infty$ , avec  $t \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Dans ce cas on note l'ordre de monodromie autour de 0, 1,  $t$  et  $\infty$  par  $p_0, p_1, p_t$  et  $p_\infty$  respectivement. Nous avons déjà dit dans le chapitre précédent qu'on ne considère que des polygones  $C$  d'aire orbifold positive nulle

$$\Delta(C) = 2\pi(2g - 2 + \sum_{i=1}^4 (1 - \frac{1}{p_i})) \geq 0.$$

Les côtés de polygone sont euclidiens si  $\Delta(C) = 0$ , cela implique que  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{p_i} = 2$ , ils sont hyperboliques si  $\Delta(C) > 0$  ou si  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{p_i} < 2$  avec  $p_0 \leq p_1 \leq p_t \leq p_\infty$ . Le quadruplet  $(2, 2, 2, 2)$  est le seul polygone euclidien.

On veut encore construire la famille de revêtements ramifiés  $\phi : \mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^1$  à deux

paramètres  $t_1$  et  $t_2$  de degré  $d$  tel qu'ils se ramifient au dessus des quatre pôles non apparents de l'équation  $E$  et que l'équation transformée  $E' = \phi^*E$  possède  $5 + 2$  pôles simples. Alors on peut dire que  $\phi$  est encore une fonction rationnelle. Selon F. Pakovich [40], si le nombre de valeur critique de  $\phi$  est supérieur ou égal à 4 alors il existe toujours une application rationnelle. Par la formule de Hurwitz, on peut obtenir la dimension de l'espace de déformation ou le nombre de point de ramification libre donné par la formule

$$N = \sum_{i=1}^4 c_i - 2 - 2d;$$

où  $c_i$  désigne le nombre total de points sur  $i = 0, 1, t, \infty$ . On peut avoir une infinité de quadruplets qui sont solutions de l'inéquation mais ici on cherche seulement les quadruplets  $(p_0, p_1, p_t, p_\infty)$  hyperboliques et les degrés  $d$  de revêtement correspondants satisfont les conditions suivantes :

1.  $2d - \lfloor \frac{d}{p_0} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_1} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_t} \rfloor - \lfloor \frac{d}{p_\infty} \rfloor = 1,$
2.  $(2 - \sum_{i=0,1,t,\infty} \frac{1}{p_i})d \leq 2 - \frac{5}{p_\infty},$
3. **cas**  $p_\infty > d$  on a  $\frac{1}{d} + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_t} \geq 2,$   
**cas**  $p_\infty \leq d$  on obtient  $(2 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_t})p_\infty^2 - 3p_\infty + 5 \leq 0$  et  $\frac{31}{20} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_t} < 2.$

S'il existe un quadruplet qui satisfait ces conditions, il définira l'existence de revêtement de degrés  $d$  qui tire en arrière de l'équation fuchsienne  $E$  fixée sur  $\mathbb{P}_z^1$  de monodromies  $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_t}, \frac{1}{p_\infty})$ . On peut voir facilement qu'il n'y a pas un quadruplet  $(p_0, p_1, p_t, p_\infty)$  de degrés  $d$  satisfaisant toutes ces conditions. On a eu le résultat suivant :

**Théorème 15.** *Si le nombre de pôles de l'équation fuchsienne  $E$  est supérieur ou égal à 4 alors il n'existe pas une application  $\phi$ , satisfaisant les conditions ci-dessus, qui tire en arrière l'équation fuchsienne  $E$  à l'équation fuchsienne  $E'$  avec  $\#$  pôles non apparents  $\geq 5$ .*

*Proof.* Les conditions ci-dessus prouvent qu'on ne peut pas trouver des quadruplets et les degrés correspondants  $d$  qui transforment l'équation fuchsienne  $E$  en  $E'$ .  $\square$

### 3.2 Classification des solutions algébriques partielles pour $(g, n) = (2, 0)$

Dans cette partie, on classifie les déformations isomonodromiques non élémentaires de type Kitaev pour les équations fuchsiennes à pôles apparents sur les courbes de genre 2. Les déformations seront partielles, de dimension 1, et donc de codimension 2 dans l'espace de Teichmüller. Encore une fois, l'équation  $E$  doit être hypergéométrique.

**Proposition 13.** Soient  $E$  un système fuchsien hypergéométrique sur  $\mathbb{P}_z^1$  i.e ces ordres de monodromies  $p_0, p_1, p_\infty$  satisfaisant l'inégalité  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} < 1$  et  $C_2$  une courbe algébrique de genre 2. On considère

$$\phi : C_2 \rightarrow \mathbb{P}_z^1$$

une application revêtement tel que le système  $E' = \phi^*E$  est fuchsien. On suppose que tous les pôles du système fuchsien  $E'$  sont apparents. Alors

1. on a l'égalité suivante :

$$N = 2 + \left( \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i} - 1 \right) d \quad (3.1)$$

est un entier positif ou nul;

2. on obtient les inégalités suivantes :  $(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})p_\infty \leq 2$  et  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1$ .

*Proof.* On prend la formule de Riemann-Hurwitz et on pose  $\tilde{g} = 2$  le genre de la courbe  $C_2$ . On obtient la formule du nombre total de ramification :

$$r = 2d + 2.$$

On sait que l'ensemble des points critiques non apparents de  $\phi$  est vide, le nombre maximal de points critiques apparents de  $\phi$  est donné par  $\sum_{i=0,1,\infty} \lfloor \frac{d}{p_i} \rfloor$ . Comme on est dans les situations où il n'y a pas de points critiques non apparents alors sur chaque points  $i = 0, 1, \infty$  on a  $\lfloor \frac{d}{p_i} \rfloor = \frac{d}{p_i}$ . Pour obtenir le nombre de ramification minimale on pose  $r' = d - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{d}{p_i} \leq r$ . On peut compléter  $r'$  à  $r$  par des points de ramifications supplémentaires  $N$  et on obtient l'équation :

$$r = r' + N = 2d + 2 \Leftrightarrow \sum_{i=0,1,\infty} d(1 - \frac{1}{p_i}) + N = 2d + 2.$$

Donc on tire  $N$  de l'expression précédente :

$$N = 2 + d \left( \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i} - 1 \right). \quad (3.2)$$

Pour le deuxième énoncé d'après l'hypothèse, l'application  $\phi$  a un seul point critique simple supplémentaire alors on prend  $N = 1$ . D'où la formule du premier énoncé de proposition devient

$$(1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i})d = 1.$$

Comme le système fuchsien  $E'$  n'admet pas de singularités non apparentes, cela entraîne que le degré  $d \geq p_\infty$  doit toujours être supérieur ou égal à  $p_\infty$ . Alors

$$(1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i})p_\infty \leq (1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i})d = 1.$$

On obtient

$$(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})p_\infty \leq 2. \quad (3.3)$$

Pour obtenir la seconde inégalité, d'après la condition d'hyperbolicité de triangles il est évident que

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1;$$

la minoration de cette inégalité provient du fait que  $p_\infty \geq 3$ . On remplace dans l'inégalité (3.3) l'ordre  $p_\infty$  par 3, après un petit calcul on obtient donc  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \geq \frac{1}{3}$ .  $\square$

Le nombre  $N$  désigne également la dimension de l'espace de déformation de revêtement. On constate dans la proposition précédente que les triangles ne peuvent être que hypergéométriques et euclidiens. Si les triangles sont hyperboliques alors la dimension de l'espace de déformation  $N \in \{0, 1\}$  et s'ils sont tous euclidiens, la dimension de l'espace de déformation  $N = 2$ . On peut dire qu'on atteint l'espace total de la déformation si tous les triangles sont euclidiens. Ici, il est la seule possibilité pour trouver deux points critiques simples libres. Cette proposition est la condition nécessaire d'existence de l'application  $\phi$ . Si on suppose que le système fuchsien  $E$  est hypergéométrique (i.e  $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} < 1$ ), le deuxième énoncé de la proposition (13) nous permet de sélectionner la liste de triplets  $(p_0, p_1, p_\infty)$  hyperboliques pouvant choisir, on a

$(2, 3, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 7, \dots, 12$ ;

$(2, 4, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 5, \dots, 8$ ;

$(2, 5, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 5, 6$ ;

$(2, 6, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 6$ ;

$(3, 3, p_\infty)$  avec  $p_\infty = 4, 5, 6$ ;

$(3, 4, 4)$  **et**  $(4, 4, 4)$  .

Si on applique maintenant le premier énoncé de la proposition (13), on obtient la liste suivante

Ordres de monodromie de $E$	Degré de revêtement $R$	nombre de paramètres $N$
(2, 3, 7)	42	1
	84	0
(2, 3, 8)	24	1
	48	0
(2, 3, 9)	18	1
	36	0
(2, 3, 10)	15	1
	30	0
(2, 3, 12)	12	1
	24	0
(2, 4, 5)	20	1
	40	0
(2, 4, 6)	12	1
	24	0
(2, 4, 8)	8	1
	16	0
(2, 5, 5)	10	1
	20	0
(2, 5, 6)	15	0
(2, 6, 6)	6	1
	12	0
(3, 3, 4)	12	1
	24	0
(3, 3, 5)	15	0
(3, 3, 6)	6	1
	12	0
(3, 4, 4)	6	1
	12	0
(4, 4, 4)	4	1
	8	0

Table 3.1: Revêtements et triplets

Si l'on exclut les cas de dimension de l'espace de déformation  $N = 0$ , en utilisant le premier énoncé de la proposition (12), on a abouti le résultat suivant :

**Théorème 16.** *Le groupe de monodromie de l'équation  $E$  est un sous-groupe Zariski dense dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  et  $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un revêtement ramifié satisfaisant :*

- $X$  est une courbe de genre 2,
- $\phi^*E$  n'a pas que des singularités apparentes,
- $\phi$  a un et un seul point critique sur  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  et tous les autres sont sur l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ .

Alors il existe la liste des revêtements possibles :

$(p_0, p_1, p_\infty)$	Degré	Ramifications au dessus de $(0; 1; \infty)$
$(2, 3, 7)$	42	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{21 \text{ fois}}; \underbrace{3 + \dots + 3}_{14 \text{ fois}}; \underbrace{7 + \dots + 7}_{6 \text{ fois}})$
$(2, 3, 8)$	24	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{12 \text{ fois}}; \underbrace{3 + \dots + 3}_{8 \text{ fois}}; 8 + 8 + 8)$
$(2, 3, 9)$	18	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{9 \text{ fois}}; \underbrace{3 + \dots + 3}_{6 \text{ fois}}; 9 + 9)$
$(2, 3, 12)$	12	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{6 \text{ fois}}; \underbrace{3 + \dots + 3}_{4 \text{ fois}}; 12)$
$(2, 4, 5)$	20	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{10 \text{ fois}}; \underbrace{4 + \dots + 4}_{5 \text{ fois}}; \underbrace{5 + \dots + 5}_{4 \text{ fois}})$
$(2, 4, 6)$	12	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{6 \text{ fois}}; 4 + 4 + 4; 6 + 6)$
$(2, 4, 8)$	8	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{4 \text{ fois}}; 4 + 4; 8)$
$(2, 5, 5)$	10	$(\underbrace{2 + \dots + 2}_{5 \text{ fois}}; 5 + 5; 5 + 5)$
$(2, 6, 6)$	6	$(2 + 2 + 2; 6; 6)$
$(3, 3, 4)$	12	$(3 + 3 + 3 + 3; 3 + 3 + 3 + 3; 4 + 4 + 4)$
$(3, 3, 6)$	6	$(3 + 3; 3 + 3; 6)$
$(4, 4, 4)$	4	$(4; 4; 4)$

Table 3.2: Transformations du système fuchsien hypergéométrique

Dans chacun de cas,  $\phi^*E$  n'a qu'une singularité apparente libre qui provient du point critique de  $\phi$  en dehors de  $\{0, 1, \infty\}$ .

*Proof.* Utiliser le premier énoncé de la proposition (12) pour sélectionner les triplets et ses degrés correspondants. Pour obtenir les types de ramifications de chacun des cas, on

utilise l'inégalité

$$d - 1 \leq \sum_{i=0,1,\infty} c_i \leq \sum_{i=0,1,\infty} s_i + \sum_{i=0,1,\infty} \frac{d - s_i}{p_i};$$

où  $c_i$  est le nombre total de point au-dessus de chaque  $i = 0, 1, \infty$ . Le nombre total des points de  $\phi$  dans ses trois fibres est  $\sum_{i=0,1,\infty} c_i = d - 1$ . On veut que  $s_i = 0$  sur chaque  $i = 0, 1, \infty$ , alors on a  $\sum_{i=0,1,\infty} s_i = 0$ . L'inégalité devient

$$\sum_{i=0,1,\infty} \frac{d}{p_i} \geq d - 1.$$

Par exemple pour le triplet  $(2, 3, 10)$ , on a  $d \leq 15$  ; on ne peut pas avoir  $d \in \{2, \dots, 15\}$  qui est multiple commun de 2, 3 et 10.  $\square$

### 3.3 De $(g, n) = (0, 5)$ vers $(2, 0)$ via les revêtements bi-elliptiques

Ici, on construit des déformations isomonodromiques de codimension 1 sur les courbes de genre 2 à partir de solutions de systèmes de Garnier à 5 pôles.

#### 3.3.1 Courbes bi-elliptiques

On sait que toute courbe  $C_2$  de genre 2 peut être normalisée à une courbe hyperelliptique, définie par l'équation  $y^2 = x(x - 1)(x - a)(x - b)(x - c)$ . On peut poser

$$C_2 = \{(x, y) \mid y^2 = x(x - 1)(x - a)(x - b)(x - c)\}.$$

D'après Machu [38], la courbe hyperelliptique  $C_2$  de genre 2 est un revêtement double de courbes elliptiques  $C$  alors elle devient bi-elliptique ou le produit fibré des deux revêtements elliptiques de  $\mathbb{P}^1$ . On peut dire que chaque courbe elliptique est un sous-revêtement de  $C_2$  de degré deux. Le résultat suivant donne la condition nécessaire et suffisante pour que  $C_2$  soit bi-elliptique.



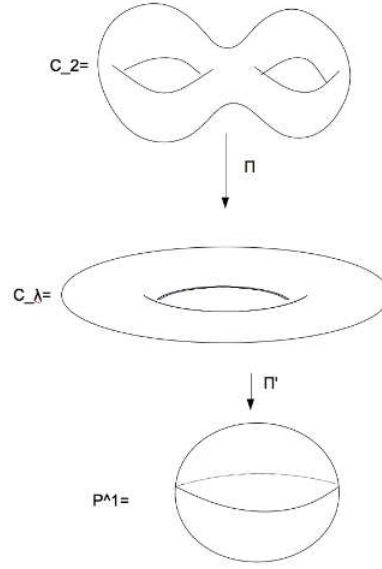


Figure 3.1: Revêtement bi-elliptique

**Proposition 14.** Soit  $C_2$  une courbe hyperelliptique de genre 2 définie par l'ensemble  $\{(x, y), y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)\}$ . La courbe  $C_2$  est bi-elliptique si et seulement s'il existe une involution  $\varphi(x) \in PGL(2, \mathbb{C})$  qui permutent les six points (ne fixe aucun).

*Proof.* En effet on peut supposer, par changement de coordonnées, que  $\varphi(x) = -x$  alors les six points seront :  $\pm 1, \pm a$  et  $\pm b$ . Alors la courbe  $C_2$  redéfinira par l'équation  $y^2 = k(x^2 - 1)(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$  où  $k$  est une constante qu'on peut de nous la débarrasser en faisant une petite transformation des racines du polynôme en  $x$ . Réciproquement si la courbe bi-elliptique est définie par l'équation  $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$ . On peut construire une transformation fractionnelle  $\varphi$  qui permute les racines  $\pm 1, \pm \alpha$  et  $\pm \beta$  de l'équation. Elle envoie 1 sur 0,  $-1$  sur  $\infty$ ,  $\alpha$  sur 1,  $-\alpha$  sur  $a$ ,  $\beta$  sur  $b$  et  $-\beta$  sur  $c$ . Cette transformation est définie par  $\varphi(x) = \frac{(\alpha+1)(x-1)}{(\alpha-1)(x+1)}$ . L'action de  $\varphi(x)$  sur la courbe bi-elliptique lui change en forme normalisée de courbe de genre 2.  $\square$

Finalement, on va considérer  $C_2$  comme une courbe bi-elliptique qui sera définie par les zéros de l'équation  $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$ . Cela nous permet (voir thèse Machu [38]) d'écrire que la courbe  $C_2$  est définie par l'ensemble

$$C_2 = \{(x, y_1, y_2) \mid y_i^2 = x(x-1)(x-\lambda_i), i = 1, 2\}.$$

En ce fait, il devient plus clair que la courbe  $C_2$  est un produit fibré des deux courbes elliptiques  $C_{\lambda_1} \times C_{\lambda_2}$ , où  $C_{\lambda_i}$  ;  $i = 1, 2$  sont des revêtements doubles de  $\mathbb{P}^1$  qui se ramifient sur trois points communs 0, 1 et  $\infty$  et elles sont distinctes aux quatrième points de ramifications. Chacunes sont définies par l'équation :  $y_i^2 = x(x-1)(x-\lambda_i)$ . Puisque cette condition nécessaire et suffisante a été faite par Machu dans sa thèse pour

que la courbe bi-elliptique soit égale au fibré produit des deux revêtements elliptiques  $C_{\lambda_1} \times C_{\lambda_2}$  de  $\mathbb{P}^1$ . Mais ici, nous allons proposer une autre méthode.

Considérons

$$\begin{aligned}\pi_i : C_2 &\rightarrow C_{\lambda_i} \\ (x, y_1, y_2) &\mapsto (x, y_i);\end{aligned}$$

les revêtements doubles de courbes elliptiques  $C_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Chacune de courbe elliptiques  $C_{\lambda_i}$  est invariante par l'action de l'involution  $\sigma_i : y_i \rightarrow -y_i$  alors la courbe  $C_2$  sera invariante par la composition de ces deux involutions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , on pose donc  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$  cette involution de  $C_2$ . Il est facile de voir que les projections

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_i : C_{\lambda_i} &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x, y_i) &\mapsto x;\end{aligned}$$

sont des revêtements doubles de  $\mathbb{P}^1$ , le produit fibré des deux revêtements de  $\mathbb{P}^1$  rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & C_2 & & \\ & \swarrow \pi_1 & \downarrow X & \searrow \pi_2 & \\ C_{\lambda_1} & & \mathbb{P}^1 & & C_{\lambda_2} \\ & \searrow \tilde{\pi}_1 & \downarrow x & \swarrow \tilde{\pi}_2 & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

Il nous reste à déterminer les transformations  $X$  et  $x$  au milieu du diagramme ci-dessus.

**Proposition 15.** *La courbe bi-elliptique  $C_2$  est birationnellement équivalente à la courbe*

$$Z^2 = (X^2 - 1)(X^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})(X^2 - \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}). \quad (3.4)$$

via les changements de coordonnées

$$x = \frac{\lambda_1 X^2 - \lambda_2}{X^2 - 1}, y_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)}Z}{(X^2 - 1)^2}, y_2 = X y_1.$$

*Proof.* On pose  $X = \frac{y_2}{y_1}$  est la projectivisation du produit fibré  $C_2$  qui est invariante par l'involution  $\sigma$  agissant sur  $C_2$ . On remplace  $y_2$  et  $y_1$  par leur équation dans l'expression de  $X$  alors

$$X^2 = \frac{x - \lambda_2}{x - \lambda_1}. \quad (3.5)$$

On peut maintenant construire une transformation birationnelle élémentaire  $\phi$  qui transforme la courbe  $C_2$  en une autre courbe algébrique  $\tilde{C}_2$  de genre 2. On déduit

$$x = \frac{\lambda_1 X^2 - \lambda_2}{X^2 - 1}$$

dans l'équation (3.5) qui s'exprime en fonction de  $X$ .

On pose  $Y = y_2 - y_1$ , ces deux équations supposées entraînent

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{Y}{X-1} \\ y_2 &= \frac{XY}{X-1}. \end{aligned}$$

Par ce processus, on a construit  $\phi : (x, y_1, y_2) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  qui fait passer de  $C_2$  en  $\tilde{C}_2$ . Nous allons procéder la construction de l'équation qui définit la courbe  $\tilde{C}_2$ . On sait que  $y_1$  et  $y_2$  satisfont les équations elliptiques, après la substitution de ces valeurs dans les équations elliptiques  $C_{\lambda_i}$  on obtient une relation entre les nouvelles variables  $X$  et  $Y$  qui sera définie par

$$Y^2 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{(X^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})(X^2 - \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1})}{(X - 1)(X + 1)^3}.$$

Pour arriver à l'équation de la courbe bi-elliptique dans ces nouvelles variables, on pose  $Z = \frac{(X+1)^2(X-1)Y}{\sqrt{\lambda_1(\lambda_1-1)(\lambda_1-\lambda_2)}}$ , alors on obtient l'équation (3.4) :

$$Z^2 = (X^2 - 1)(X^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})(X^2 - \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}).$$

Elle définit l'équation de la courbe bi-elliptique. La courbe bi-elliptique  $\tilde{C}_2$  obtenue après cette transformation birationnelle élémentaire est déterminée par l'équation ci-dessus. Donc

$$\tilde{C}_2 = \{(X, Z) \mid Z^2 = (X^2 - 1)(X^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})(X^2 - \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1})\}.$$

Elle est également invariante par l'action de l'involution  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ . On peut dire autrement qu'étant donné deux revêtements elliptiques  $C_{\lambda_1}$  et  $C_{\lambda_2}$ , on peut construire une courbe  $\tilde{C}_2$  de genre 2 qui se normalise par une transformation birationnelle élémentaire à une courbe régulière  $C_2$  de genre 2.  $\square$

On s'aperçoit que les fonctions au milieu du diagramme sont totalement ramifiées sur  $\lambda_1$  et sur  $\lambda_2$  ; sur les points 0, 1 et  $\infty$  passent les branches simples alors elles ne se sont pas ramifiées en ces lieux (voir la figure). On peut constater cela par la construction de  $\tilde{C}_2$  à partir des deux courbes elliptiques, qu'un point de  $\tilde{C}_2$  correspond à deux points de la courbe  $C_2$ . On donne maintenant les lieux de branchements de l'équations (3.4) qui

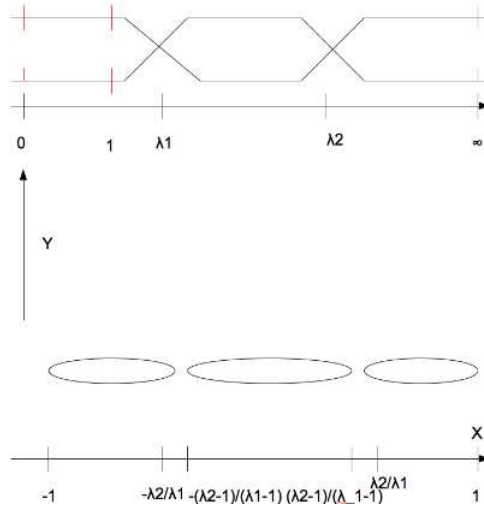


Figure 3.2: **Lieu de Branchement**

sont les six points :  $\pm 1$ ,  $\pm \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$  et  $\pm \sqrt{\frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}}$ .

On peut aussi construire les courbes elliptiques en démarrant par l'équation de courbe bi-elliptique. Pour cela, on considère l'équation de courbe  $C_2$  sous la forme  $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$ . On retrouve les revêtements elliptiques en posant  $a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  et  $b = \frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}$ .

On en déduit  $\lambda_1 = \frac{b-1}{b-a}$  et  $\lambda_2 = \frac{a(b-1)}{b-a}$ . Les courbes elliptiques sont déterminées par les paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

### 3.3.2 De $(g, n) = (0, 5)$ vers $(1, 1)$

On peut construire de nombreuses déformations isomonodromiques d'équations fuchsiennes sur une courbe elliptique avec 1 pôle non apparent en relevant une équation  $E$  avec 4 pôles sur  $\mathbb{P}^1$  d'exposants  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta)$  sur le revêtement double ramifiant le long de ces pôles (voir figure 3.3 et [35]). L'équation relevée aura alors pour exposants  $2\theta$ . La déformation isomonodromique sera alors paramétrée par une solution de Painlevé VI.

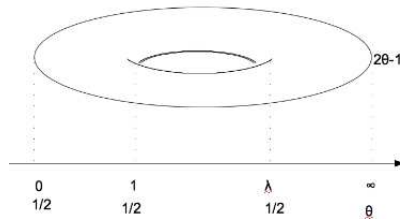


Figure 3.3: **Connexion fuchsienne sur le tore moins un point**

Rappelons qu'une connexion  $\nabla'$  définie sur une courbe elliptique est de rang 1, à qui associe à ses valeurs propres  $(\theta_\alpha, \theta_\beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . Si on fait agir l'involution sur  $\nabla'$ , on définit une nouvelle connexion  $\nabla^i$  de rang 1 sur  $C_\lambda$  alors la somme directe  $E = \nabla' \oplus \nabla^i$  est une connexion de rang 2 sur  $C_\lambda$ , qui est invariante par involution. Elle est projectivement équivalente à l'équation Riccati avec des pôles simples sur  $\mathbb{P}^1$  des valeurs propres  $\theta_\alpha, \theta_\beta$ . Inversement étant donné le couple  $(\theta_\alpha, \theta_\beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ , on peut lui associer une connexion fuchsienne  $E$  de rang 2 dont ses valeurs propres sont  $\theta_\alpha$  et  $\theta_\beta$  définie sur une courbe elliptique  $C_\lambda$ . On a déjà montré dans le chapitre 1 que cette correspondance est localement bijective. Elle est caractérisée par sa représentation de monodromie donnée par :

$$\begin{aligned}\pi_1(E) &\rightarrow PGL(2, \mathbb{C}) \\ \mathbb{Z}_{\alpha, \beta}^2 &\rightarrow [\varphi_\alpha, \varphi_\beta].\end{aligned}$$

Si on commence par l'espace modulaire de connexion fuchsienne, noté  $\tilde{\mathcal{H}}$ , sur le revêtement  $\pi : C_\lambda \rightarrow \mathbb{P}_z^1$  et celui de connexion fuchsienne, noté  $\mathcal{H}$ , sur  $\mathbb{P}_z^1$ . On vérifie si l'application  $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  est bijective, cela correspond à prouver que la connexion  $E'$  sur  $C_\lambda$  est bien le relevé de connexion  $E$ . On fait d'abord comparer la dimension de l'espace modulaire  $\mathcal{H}$  et  $\tilde{\mathcal{H}}$ , ils seront de la même dimension si l'application est bijective. On commence par le cas de connexion fuchsienne  $E'$  munie d'une seule singularité. La correspondance de Riemann-Hilbert nous donne des isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{\text{Riccati } E \text{ sur } \mathbb{P}^1 \text{ avec } \begin{pmatrix} \text{poles} & 0 & 1 & \lambda & \infty \\ \text{exposants} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \theta \end{pmatrix}\} / \text{isomorphismes près} \\ &\simeq \{(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_\lambda, \varphi_\infty) / \begin{pmatrix} \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_\lambda \circ \varphi_\infty = id \\ \varphi_0, \varphi_1, \varphi_\lambda \sim -z, \quad \varphi_\infty \sim e^{2i\pi\theta} z \end{pmatrix}\} / \text{conjugaisons près}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}} &= \{\text{Riccati } E \text{ sur } C_\lambda \text{ avec } \begin{pmatrix} \text{pole} & \infty \\ \text{exposant} & 2\theta - 1 \end{pmatrix}\} / \text{isomorphismes près} \\ &\simeq \{(\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma) / [\varphi_\alpha, \varphi_\beta] = \varphi_\gamma \sim e^{2i\pi(2\theta-1)} z\} / \text{conjugaisons près}\end{aligned}$$

Pour la connexion sur  $\mathbb{P}^1$ , la dimension de son espace modulaire est

$$\dim(\mathcal{H}) = 4 \times 3 - 4 - 3 - 3 = 2;$$

où on donne la signification de ces chiffres de droite à gauche : le premier 4 est le nombre de points singuliers et le second 4 est le nombre de valeurs propres ; le premier 3 est la dimension de  $PGL(2, \mathbb{C})$  autour de chaque points singuliers, le deuxième 3 est la dimension obtenue après la normalisation de trois points singuliers à 0, 1 et  $\infty$  et le troisième 3 est la dimension de quotient de  $\mathcal{H}$  par  $PGL(2, \mathbb{C})$ .

Et pour la dimension de l'espace modulaire de connexion sur la courbe elliptique  $E(2\theta-1)$

$$\dim(\tilde{\mathcal{H}}) = 3 \times 3 - 3 - 1 - 3 = 2;$$

les trois premiers 3 de droite à gauche désignent respectivement la dimension de monodromie, la dimension de normalisation et le nombre de relation (conjugaison) et le dernier 3 à gauche est le nombre de monodromie qui engendre et 1 est le nombre de valeur propre.

On voit que les deux dimensions modulaires sont égales ( $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\tilde{\mathcal{H}})$ ), alors on peut espérer que l'application

$$\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$$

est bijective. Comme la connexion fuchsienne définie sur la courbe  $C_\lambda$  est invariante par involution, sa représentation de monodromie doit également être invariante par cette action. Pour montrer que sa monodromie reste invariante après l'action de l'involution, on prouve l'existence d'un élément de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  d'ordre 2 qui envoie les monodromies autour de la base principale de  $C_\lambda$  sur leurs inverses et il fixe la monodromie autour de la singularité. On a le lemme suivant :

**Lemme 1.** *Soient  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  et  $\varphi_\gamma \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  tels que le groupe engendré par  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  est irréductible, alors il existe une et une seule involution  $\varphi_i \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  d'ordre 2 telle que :*

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_i^{-1} &= \varphi_\alpha^{-1} \\ \varphi_i \circ \varphi_\beta \circ \varphi_i^{-1} &= \varphi_\beta^{-1} \\ \varphi_i \circ \varphi_\gamma \circ \varphi_i^{-1} &= \varphi_\gamma\end{aligned}$$

Ce lemme est démontré dans [35], on ne le détaille pas ; on donne une version plus générale dans la prochaine section.

### 3.3.3 De $(g, n) = (0, 5)$ vers $(1, 2)$

On peut aussi construire des déformations isomonodromiques d'équations fuchiennes sur une courbe elliptique avec 2 pôles non apparent, disons  $t_1$  et  $t_2$ , en relevant équation fuchsienne  $E$ , avec 5 pôles sur  $\mathbb{P}^1$ , voir la figure 3.4. Si les exposants de l'équation  $E$  sont  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2})$ , alors ceux de l'équation relevée  $E'$  sur  $C_\lambda$  seront donnés par  $(\theta, \theta)$ .

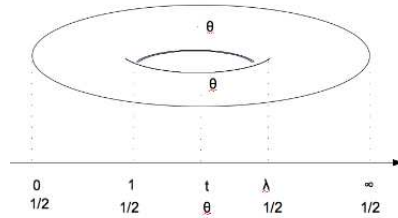


Figure 3.4: Connexion fuchsienne sur le tore privé de deux points

Le groupe fondamental de courbe elliptique  $\pi_1(C_\lambda \setminus \{t_1, t_2\})$  est engendré par

$$\{(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) / \alpha \cdot \beta = \gamma_1 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \gamma_2\}$$

où son domaine fondamental sera présenté de la façon suivante dans la figure ci-dessous.

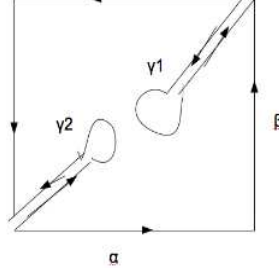


Figure 3.5: **Domaine fondamental**

On va comparer les espaces de modules d'équations fuchsiennes (ou Riccati, ou connexions) via la correspondance de Riemann-Hilbert, en comparant leurs monodromies. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{\text{Riccati } E \text{ sur } \mathbb{P}^1 \text{ avec } \begin{pmatrix} \text{poles} & 0 & 1 & t & \lambda & \infty \\ \text{exposants} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \theta & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\} / \text{isomorphismes près} \\ &\simeq \{(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_t, \varphi_\lambda, \varphi_\infty) / \begin{pmatrix} \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_t \circ \varphi_\lambda \circ \varphi_\infty = id \\ \varphi_0, \varphi_1, \varphi_\lambda, \varphi_\infty \sim -z, \quad \varphi_t \sim e^{2i\pi\theta} z \end{pmatrix}\} / \text{conjugaisons près} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \{\text{Riccati } E \text{ sur } C_\lambda \text{ avec } \begin{pmatrix} \text{poles} & t_1 & t_2 \\ \text{exposants} & \theta & \theta \end{pmatrix}\} / \text{isomorphismes près} \\ &\simeq \{(\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_{\gamma_1}, \varphi_{\gamma_2}) / \begin{pmatrix} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\gamma_1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_{\gamma_2} \\ \varphi_{\gamma_1}, \varphi_{\gamma_2} \sim e^{2i\pi\theta} z \end{pmatrix}\} / \text{conjugaisons près} \end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(\tilde{\mathcal{H}}) = 4.$$

Toute Riccati de  $\mathcal{H}$  se relève par le revêtement double en une Riccati de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Examinons comment se relève la monodromie. Pour cela, considérons les lacets  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_t, \gamma_\lambda$  et  $\gamma_\infty$  autour de  $0, 1, t, \lambda$  et  $\infty$  respectivement dans  $\mathbb{P}^1$  et de point base  $p$ . Le point base  $p$  dans  $\mathbb{P}^1$  se relève en deux points  $p$  et  $p'$  sur la courbe elliptique  $C_\lambda$  comme dans la figure 3.3.4. Les lacets autour de  $0, 1, \lambda$  et  $\infty$  se relèvent en deux chemins (des deux demi-lacets) que nous noterons  $(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}'_0), (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}'_1), (\tilde{\gamma}_\lambda, \tilde{\gamma}'_\lambda)$  et  $(\tilde{\gamma}_\infty, \tilde{\gamma}'_\infty)$  respectivement ; les premiers vont de  $p$  à  $p'$ , et les seconds de  $p'$  à  $p$ . Puisque les deux points singuliers de la Riccati sur  $C_\lambda$  se situent au dessus du point  $t \in \mathbb{P}^1_z \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}$ , alors le lacet  $\gamma_t$  autour du point  $t$  se relève exactement en deux lacets  $\tilde{\gamma}_t$  et  $\tilde{\gamma}'_t$  (basés en  $p$  et  $p'$ ) qui tournent

respectivement autour des points  $t_1$  et  $t_2$ . Les carrés de couleurs bleu représentent le domaine fondamental du tore. Alors on peut exprimer les chemins et lacets  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en fonction des lacets de  $\pi_1(\mathbb{P}_z^1 \setminus \{0, 1, t, \lambda, \infty\})$  et inversement. Ces chemins sont déterminés (voir figure 3.3.4) comme suit :

$$\begin{cases} \alpha &= \tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}'_t \cdot \tilde{\gamma}'_\lambda \\ \beta &= \tilde{\gamma}_\lambda \cdot \tilde{\gamma}'_\infty \\ \gamma_1 &= \tilde{\gamma}_t \\ \gamma_2 &= \tilde{\gamma}_\infty \cdot \gamma'_t \cdot \gamma_\infty^{-1} \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que les lacets ainsi définis satisfont la relation

$$\alpha \cdot \beta = \gamma_1 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \gamma_2$$

en utilisant les relations

$$\tilde{\gamma}_i \cdot \tilde{\gamma}'_i = 1 \quad \text{pour } i = 0, 1, \lambda, \infty$$

et celles qui relèvent  $\gamma_0 \circ \gamma_1 \circ \gamma_t \circ \gamma_\lambda \circ \gamma_\infty = 1$  à savoir

$$\tilde{\gamma}_0 \circ \tilde{\gamma}'_1 \circ \tilde{\gamma}_t \circ \tilde{\gamma}_\lambda \circ \tilde{\gamma}'_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}'_0 \circ \tilde{\gamma}_1 \circ \tilde{\gamma}'_t \circ \tilde{\gamma}'_\lambda \circ \tilde{\gamma}_\infty = 1.$$

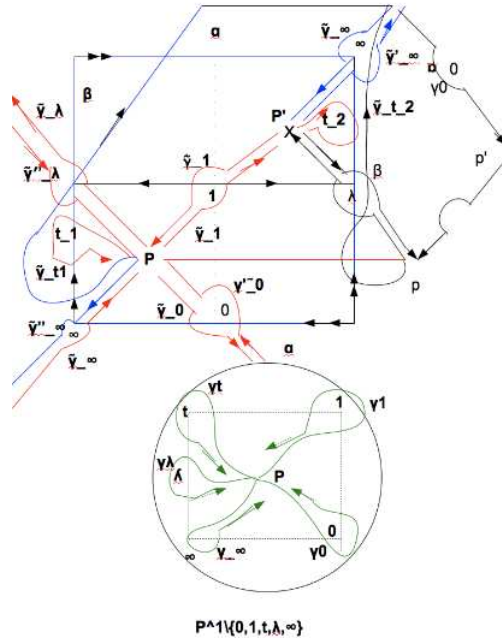


Figure 3.6: Relèvement des lacets sur la courbe elliptique



**Lemme 2.** *L'unique involution elliptique qui permute les deux points  $t_1$  et  $t_2$  agit comme suit sur les générateurs du groupe fondamental :*

$$\begin{aligned}\alpha &\leftrightarrow \alpha^{-1} \\ \beta &\leftrightarrow \beta^{-1} \\ \gamma_1 &\leftrightarrow \gamma_2\end{aligned}$$

Il faut bien sûr déplacer le point base pour que ceci ait un sens, ce que nous faisons dans la preuve.

*Proof.* L'involution permute les deux points base  $p$  et  $p'$  et agit sur les relevés des  $\gamma_i$  comme suit

$$\tilde{\gamma}_i \leftrightarrow \tilde{\gamma}'_i \quad \text{pour } i = 0, 1, t, \lambda, \infty.$$

En particulier, si l'on note

$$\begin{cases} \alpha' &= \tilde{\gamma}'_1 \cdot \tilde{\gamma}_t \cdot \tilde{\gamma}_\lambda \\ \beta' &= \tilde{\gamma}'_\lambda \cdot \tilde{\gamma}_\infty \end{cases}$$

alors l'involution agit sur ces lacets par

$$\alpha \leftrightarrow \alpha' \quad \text{et} \quad \beta \leftrightarrow \beta'.$$

On ramène ces nouveaux lacets au point base  $p$  en conjuguant par exemple par  $\tilde{\gamma}_\infty$  ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\alpha &\leftrightarrow \tilde{\gamma}_\infty \cdot \alpha' \cdot \tilde{\gamma}_\infty^{-1} \\ \beta &\leftrightarrow \tilde{\gamma}_\infty \cdot \beta' \cdot \tilde{\gamma}_\infty^{-1} \\ \tilde{\gamma}_t &\leftrightarrow \tilde{\gamma}_\infty \cdot \tilde{\gamma}'_t \cdot \tilde{\gamma}_\infty^{-1}\end{aligned}$$

On a bien  $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$  et par un calcul direct utilisant les relations entre les  $\tilde{\gamma}_i$  et  $\tilde{\gamma}'_i$ , on vérifie que  $\alpha \leftrightarrow \alpha^{-1}$  et  $\beta \leftrightarrow \beta^{-1}$ .  $\square$

Une condition nécessaire pour qu'une Riccati sur la courbe elliptique  $C_\lambda$  descende, c'est à dire provienne d'une Riccati en bas, avec 5 pôles sur  $\mathbb{P}^1$ , est qu'elle soit invariante par l'involution du revêtement. En particulier, sa représentation de monodromie doit être elle-aussi invariante. Pour montrer que c'est génériquement vrai, nous allons travailler dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Toute représentation

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \lambda, \infty\}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$$

se relève dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  : on relève les générateurs  $\rho(\gamma_i)$  en des matrices  $M_i \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  et on a évidemment  $M_0 M_1 M_t M_\lambda M_\infty = \pm I$ . Pour chaque relevé, on a le choix du signe ; quitte à changer celui de  $M_\infty$ , par exemple, on a

$$M_0 M_1 M_t M_\lambda M_\infty = I \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{trace}(M_i) &= 0 \\ \text{trace}(M_t) &= 2 \cos(\pi\theta) \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, 1, \lambda, \infty$$

Rappelons que  $\text{trace}(M) = 0 \Leftrightarrow M^2 = -I$  dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

**Corollaire 1.** Soient  $M_0, M_1, M_\lambda, M_t$  et  $M_\infty$  les matrices de monodromies associées aux lacets  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\lambda, \gamma_t$  et  $\gamma_\infty$  dans  $\mathbb{P}^1$  telle que  $M_0.M_1.M_\lambda.M_t.M_\infty = I$  et  $M_0^2 = M_1^2 = M_\infty^2 = -I$  ; alors elles se relèvent sur  $C_\lambda$  en monodromies suivantes

$$\begin{cases} A &= M_1 M_t M_\lambda, \\ B &= M_\lambda M_\infty, \\ D_1 &= M_t, \\ D_2 &= M_\infty M_t M_\infty^{-1}. \end{cases}$$

On vérifie que l'on a  $AB = D_1 B A D_2$  et donc bien une représentation de

$$\pi_1(C_\lambda \setminus \{t_1, t_2\}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

(on aurait pu trouver  $AB = -D_1 B A D_2$ ) et on a

$$\mathrm{trace}(D_1) = \mathrm{trace}(D_2) = 2 \cos(\pi\theta) \quad (= \mathrm{trace}(M_t)).$$

Puisque la relation  $AB = D_1 B A D_2$  est invariante par

$$A \leftrightarrow A^{-1} \quad B \leftrightarrow B^{-1} \quad D_1 \leftrightarrow D_2$$

la représentation est bien invariante par l'involution du revêtement. On a trouvé le resultat suivant :

**Théorème 17.** Soient  $A, B, D_1, D_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  telles que

$$AB = D_1 B A D_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{trace}(D_1) = \mathrm{trace}(D_2) \neq 2.$$

Supposons que le groupe  $\langle A, B \rangle$  engendré par  $A$  et  $B$  soit irréductible, c'est à dire sans vecteur propre commun. Alors il existe une matrice  $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ,  $M^2 = -I$ , telle que

$$M A M^{-1} = A^{-1} \quad M B M^{-1} = B^{-1} \quad M D_1 M^{-1} = D_2.$$

De plus, la représentation descend sur  $\mathbb{P}^1$  en posant

$$\begin{cases} M_0 &= -AM, \\ M_1 &= A B D_2^{-1} M, \\ M_t &= D_1, \\ M_\lambda &= -BM, \\ M_\infty &= M \end{cases}$$

Commençons par rappeler plusieurs résultats connus sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .

**Lemme 3.** Deux matrices  $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  engendrent un groupe réductible si et seulement si  $\mathrm{trace}[A, B] = 2$  où  $[A, B] = A B A^{-1} B^{-1}$  est le commutateur.

*Proof.* Si  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun, alors on peut trianguler le groupe  $\langle A, B \rangle$  et le commutateur sera une matrice unipotente, donc de trace 2. Réciproquement, supposons que  $A$  et  $B$  n'ont pas de vecteur propre commun. Alors un vecteur propre  $v$  de  $AB$  ne sera pas vecteur propre pour  $A$  ou pour  $B$ . Si  $ABv = \gamma v$ , alors dans la base  $(v, -\gamma Bv)$ , les matrices sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\gamma} \\ -\gamma & b \end{pmatrix}$$

où  $a = \text{trace}(A)$  et  $b = \text{trace}(B)$ . On vérifie que

$$[A, B] = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + \gamma^2 - abc & \gamma^{-2}(a - b\gamma) \\ a - b\gamma^{-1} & \gamma^{-2} \end{pmatrix}$$

et donc que

$$\text{trace}([A, B]) = a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2, \quad c = \gamma + \gamma^{-1} = \text{trace}(AB).$$

Enfin, les matrices  $A$  et  $B$  au dessus ont un vecteur propre commun si et seulement si  $a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2 = 2$ .  $\square$

**Lemme 4.** Soient  $A, B, A', B' \in SL(2, \mathbb{C})$  et supposons  $\text{trace}[A, B] \neq 2$ . Il existe  $M \in SL(2, \mathbb{C})$  telle que

$$MAM^{-1} = A' \quad \text{et} \quad MBM^{-1} = B'$$

si et seulement si

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(A'), \quad \text{trace}(B) = \text{trace}(B') \quad \text{et} \quad \text{trace}(AB) = \text{trace}(A'B').$$

*Proof.* C'est une conséquence des formules de la preuve du lemme précédent.  $\square$

**Corollaire 2.** Si  $\text{trace}[A, B] \neq 2$ , alors il existe  $M \in SL(2, \mathbb{C})$  unique au signe près telle que

$$MAM^{-1} = A^{-1} \quad \text{et} \quad MBM^{-1} = B^{-1}.$$

De plus,  $M^2 = -I$ .

*Proof.* Il suffit de remarquer que  $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^{-1})$  et  $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$  pour toutes matrices  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ . On en déduit sous nos hypothèses que

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(A^{-1}), \quad \text{trace}(B) = \text{trace}(B^{-1}) \quad \text{et} \quad \text{trace}(AB) = \text{trace}(A^{-1}B^{-1})$$

et donc qu'il existe  $M$  comme dans la première partie de l'énoncé. Mais  $M^2$  doit alors commuter à  $A$  et à  $B$ . Donc  $M^2$  doit fixer les sous-espaces propres de tous les éléments du groupe  $\langle A, B \rangle$ . Il y a au moins trois droites distinctes et donc  $M^2$  est projectivement l'identité :  $M^2 = \pm I$ . Mais  $M = \pm I$  est impossible puisque  $MAM^{-1} = A^{-1} \neq A$

( $A \neq \pm I$  sinon  $\langle A, B \rangle$  serait réductible). Donc  $M^2 \neq I$  et  $M^2 = -I$ . Si les matrices  $A$  et  $B$  sont données comme dans la preuve du lemme au dessus, alors  $M$  est donnée par

$$M = \pm \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2-1}{2\gamma} & \frac{a-b\gamma}{2\gamma} \\ \frac{a\gamma-b}{2} & -\frac{\gamma^2-1}{2\gamma} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

□

*Preuve du théorème 17.* On veut montrer que l'unique (au signe près) matrice  $M$  satisfaisant

$$MAM^{-1} \quad \text{et} \quad MBM^{-1}$$

satisfait aussi

$$MD_1M^{-1} = D_2 \quad \text{et donc} \quad MD_2M^{-1} = D_1$$

( $M^2 = -I$ ). D'après la relation  $AB = D_1BAD_2$ , c'est équivalent à

$$AB = D_1BAMD_1M^{-1} \Leftrightarrow (BAMD_1)^2 = -I \Leftrightarrow \text{trace}(BAMD_1) = 0.$$

On réécrit la relation  $AB = D_1BAD_2$  sous la forme

$$[A, B] = D_1BAD_2A^{-1}B^{-1} = D_1D'_2 \quad \text{avec} \quad D'_2 = (BA)D_2(BA)^{-1}.$$

Notons que

$$(BAM)^2 = BAMBAM = BAB^{-1}A^{-1}M^2 = -BAB^{-1}A^{-1} = -[A, B]^{-1}$$

de sorte que  $(BAM)^2D_1 = -(D'_2)^{-1}$  et

$$\text{trace}((BAM)^2D_1) + \text{trace}(D_1) = 0.$$

Maintenant, rappelons que dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  on a

$$\text{trace}(M_1M_2) + \text{trace}(M_1M_2^{-1}) = \text{trace}(M_1) \cdot \text{trace}(M_2).$$

En appliquant ceci à  $M_1 = BAM$  et  $M_2 = BAMD_1$ , on trouve

$$0 = \text{trace}((BAM)^2D_1) + \text{trace}(D_1) = \text{trace}(BAMD_1) \cdot \text{trace}(BAM).$$

Or,  $\text{trace}(BAM) \neq 0$  sinon  $(BAM)^2 = -[A, B]^{-1} = -I$ , i.e.  $[A, B] = I$ , ce qui contredirait l'irréductibilité. Donc  $\text{trace}(BAMD_1) = 0$ , ce qu'on voulait montrer. Enfin, on vérifie immédiatement que les matrices  $M_i$  données dans l'énoncé inversent les formules précédentes en utilisant la relation  $AB = D_1BAD_2$  et les propriétés de  $M$ . □

Voici quelques représentations explicites :

$$\bullet \quad A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\delta} \\ -\delta & b \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\tau^2-1}{2\tau} & \frac{a-b\tau}{2\tau} \\ \frac{a\tau-b}{2} & -\frac{\tau^2-1}{2\tau} \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \tau - d_1 & \frac{-d_1^2 + \tau d_1 - 1}{c_1} \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \tau - d_2 & \frac{-d_2^2 + \tau d_2 - 1}{c_2} \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix};$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$   
 $D_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+ab}{d} & a \\ b & d \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+ab}{d} & -a \\ -b & d \end{pmatrix};$
- $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & 0 \end{pmatrix},$   
 $D_1 = \begin{pmatrix} \mu & c_1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \tau & c_2 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix};$
- $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a+b}{2} \\ -\frac{a+b}{2} & 0 \end{pmatrix},$   
 $D_1 = \begin{pmatrix} \tau & c_1 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix};$
- $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tau} \\ -\tau & b \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \frac{\tau^2-1}{2\tau} & \frac{a-b\tau}{2} \\ \frac{a\tau-b}{2} & -\frac{\tau^2-1}{2\tau} \end{pmatrix},$   
 $D_1 = \begin{pmatrix} \frac{-b\tau+a}{c_1+c_2} & c_1 \\ 0 & \frac{c_1+c_2}{-b\tau+a} \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} \frac{-b\tau+a}{c_1+c_2} & c_2 \\ 0 & \frac{c_1+c_2}{-b\tau+a} \end{pmatrix}.$

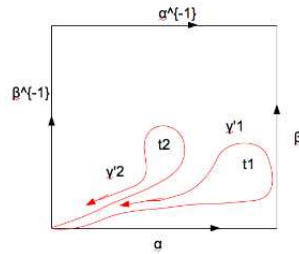
### 3.3.4 De $(g, n) = (1, 2)$ vers $(2, 0)$

On peut construire autrement une connexion fuchsienne régulière  $E'$  avec un pôle libre sur la courbe  $C_2$  de genre 2 en relevant la connexion fuchsienne singulière  $E$  fixée sur  $\mathbb{P}_z^1$  avec 5 points singuliers non apparents. On fixe les valeurs propres de la connexion fuchsienne  $E$  autour de  $z = 0, 1, t, \lambda$  et  $\infty$  à  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta$  et  $\frac{1}{2}$  respectivement. La solution de déformation isomonodromique de connexion  $E'$  obtenue est également une solution spéciale de déformation isomonodromique de connexion fuchsienne  $E$  sur  $\mathbb{P}_z^1$  i.e  $E$  possède  $5 + 1$  points singuliers. La dimension maximale de l'espace de cette déformation a été faite par Viktoria dans [21]. Pour cette construction, on utilise la bijectivité locale de représentation de Riemann-Hilbert. On a vu dans la section précédente que la courbe  $\tilde{\pi} : C_2 \rightarrow C_\lambda$  est un revêtement double ramifié de courbe elliptique  $C_\lambda$  ramifiant sur deux points réguliers de  $C_\lambda$ . La connexion fuchsienne définie sur  $C_\lambda$  admet des singularités non apparentes en ces deux points avec valeurs propres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On sait aussi que la courbe elliptique  $\pi : C_\lambda \rightarrow \mathbb{P}_z^1$  est un revêtement double de  $\mathbb{P}^1$  qui se ramifie exactement au dessus de quatre points disons  $0, 1, \lambda$  et  $\infty$ . Les deux points réguliers de  $C_\lambda$ , notés  $t_1$  et  $t_2$ , se projectent sur le même point  $t$  dans  $\mathbb{P}_z^1$  distinct de  $0, 1, \lambda$  et  $\infty$ . Les points  $t_1$  et  $t_2$  peuvent s'échanger par l'action d'involution  $i$  agissant sur  $C_\lambda$ . On veut étudier la représentation de monodromie de connexion fuchsienne régulière  $E'$  sur  $C_2$  à partir de celle de connexion fuchsienne  $E$  sur  $\mathbb{P}_z^1$  et réciproquement. Cette étude se décompose en deux parties : La courbe  $C_2$  de genre 2 est un revêtement double de la courbe elliptique  $C_\lambda$  qui se ramifie sur les deux singularités de connexion fuchsienne définie sur la courbe elliptique  $C_\lambda$ . La connexion fuchsienne définie sur  $C_2$  est régulière

si  $\theta = \frac{1}{2}$ . La connexion définie sur  $C_\lambda(\theta, \theta)$  et celle définie sur  $C_\lambda(\theta, \theta - 1)$  sont les mêmes à signe près pour cette valeur de  $\theta$ . On vérifie qu'il y a une bijection entre l'espace modulaire de connexion fuchsienne  $E'$  sur la courbe  $C_2$  de genre 2 et l'espace modulaire de celle sur  $C_\lambda$  qui sera la seconde partie. On utilise les mêmes faits que des cas ci-dessus pour trouver la dimension de l'espace modulaire de connexion régulière sur  $C_2$  qui est 6. L'espace modulaire de connexion fuchsienne sur  $C_\lambda$  s'injecte dans celui de connexion régulière sur la courbe  $C_2$  de genre 2. Le groupe fondamental de  $C_2$  est donné par  $\pi_1(C_2) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) / [\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] = 1\}$  et sa représentation de monodromie est :

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(C_2) &\rightarrow (SL(2, \mathbb{C}))^4 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) &\mapsto (A_1, A_2, B_1, B_2). \end{aligned}$$

On veut, comme le cas précédent, étudier le relèvement des lacets de courbe elliptique  $C_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  en lacets ou en chemins sur la courbe  $C_2$  et réciproquement si tous les lacets de  $C_2$  peuvent se descendre en lacets ou en chemins sur  $C_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Pour cela on considère la condition  $[\alpha, \beta] = \gamma_1 \gamma_2'$  sur la courbe elliptique qui est équivalente à condition  $\alpha \cdot \beta = \gamma_1 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \gamma_2$  par la transformation  $\gamma_2 = (\beta \cdot \alpha) \gamma_2' (\beta \cdot \alpha)^{-1}$ . Le domaine fondamental  $C_\lambda(\theta, \theta)$  se transforme en figure ci-dessous.



Si on considère la courbe elliptique  $C_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , les relevés de deux points singuliers de connexion fuchsienne sur  $C_\lambda$ , avec valeurs propres  $\frac{1}{2}$ , deviennent des points réguliers pour la connexion sur  $C_2$  et les relevés de ces lacets sur  $C_2$  seront aussi chacun des deux chemins  $\gamma_i$  et  $\tilde{\gamma}_i$ ;  $i = 1, 2$ . Les lacets commutateurs, notés  $\alpha$  et  $\beta$ , de  $C_\lambda$  se relèvent en deux lacets commutateurs  $[\alpha, \beta]$  et  $[\alpha', \beta']$  qui sont symétriques par rapport à l'axe passant verticalement par  $C_2$ , le point base  $p$  de  $C_\lambda$  se relève en deux points  $p$  et  $p'$  qui sont aussi symétriques par rapport à cet axe. On peut dire autrement qu'on a symétrisé la courbe elliptique  $C_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

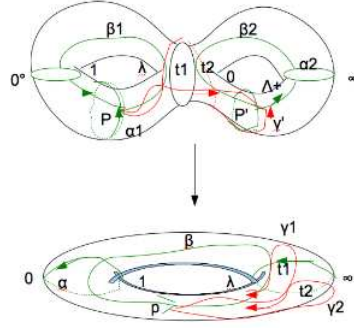


Figure 3.7: Relèvement de lacets de courbe elliptique sur  $C_2$

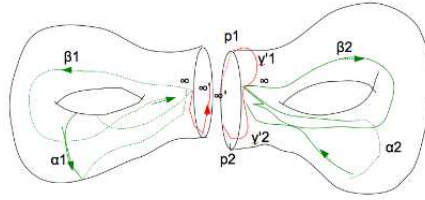


Figure 3.8: **Symétrie**

Les lacets de  $C_\lambda$  se relèvent sur  $C_2$  (voir figure (3.7)) s'il existe les chemins  $\gamma_i$  ou  $\tilde{\gamma}_i$  liant  $p$  à  $p'$  tels qu'ils conjuguent :

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \alpha, \\ \beta_1 &= \beta, \\ \alpha_2 &= \gamma_i^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma_i, \\ \beta_2 &= \gamma_i^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma_i. \end{cases}$$

avec  $i = 1, 2$  et  $[\alpha, \beta] = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ ,  $\gamma_i^2 = -1$ . Inversement les lacets  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$  et  $\beta_2$  de  $C_2$ , tel que  $[\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] = 1$ , se descendent sur la courbe elliptique  $C_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  en lacets ou en chemins s'il existe une involution  $\gamma$  tels que  $\gamma^2 = -1$ , qui conjugue:

$$\begin{cases} \alpha_2 &= \gamma^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot \gamma, \\ \beta_2 &= \gamma^{-1} \cdot \beta_1 \cdot \gamma. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1, \\ \beta &= \beta_1, \\ \gamma_1 &= \gamma, \\ \gamma_2 &= \gamma^{-1} \cdot [\alpha_1, \beta_1]. \end{aligned}$$

Par conséquent on a eu les résultats suivants :

**Proposition 16.** Soient  $A_1, B_1, A_2, B_2$  les matrices de monodromies associées aux lacets commutateurs  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  respectivement de courbe  $C_2$  telles que  $[A_1, B_1][A_2, B_2] = I$  et soient  $A, B, D_1$  et  $D_2$  les matrices de monodromies associées respectivement aux lacets  $\alpha, \beta, \gamma_1$  et  $\gamma_2$  de courbe elliptique  $C_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  telles que  $[A, B] = D_1 D_2$ . La représentation de la courbe elliptique se relève sur la courbe  $C_2$  si

$$\begin{cases} A_1 &= & A \\ B_2 &= & B \\ A_2 &= & D_1^{-1}.A.D_1 \\ B_2 &= & D_1^{-1}.B.D_1. \end{cases}$$

Réciproquement la représentation de la courbe  $C_2$  descend sur la courbe elliptique  $C_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  s'il existe une unique matrice  $M \in SL(2, \mathbb{C})$  telle que  $M^2 = -I$ , alors

$$\begin{cases} A &= & A_1, \\ B &= & B_1, \\ D_1 &= & M \\ D_2 &= & M^{-1}[A, B], \end{cases}$$

où  $I$  désigne la matrice carrée d'identité d'ordre 2.

**Remarque 4.** On remarque que le commutateur  $[A_2, B_2]$  n'est rien d'autre que l'inverse du commutateur  $[A_1, B_1]$ . Quand on fixe génériquement  $A_1$  et  $B_1$  on obtient que :

1. l'ensemble  $\{M \in SL(2, \mathbb{C}) / M^2 = -I \text{ et } M \text{ conjugue } [A_1, B_1] \text{ à son inverse}\}$  est de dimension 1,
2. l'ensemble  $\{A_1, B_1, M^{-1}.A_1.M, M^{-1}.B_1.M\}$  est aussi de dimension 1 à modulo conjugaison près.

Sauf exceptionnellement si le groupe engendré par  $\langle A_1, B_1 \rangle$  est réductible la dimension de ces représentations sera supérieure ou égale à 1.

Exemple:  $A_1.B_1 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  alors le groupe  $\langle A_1, B_1 \rangle$  est abélien.

D'après Machu, les matrices  $A_i$  et  $B_i$  sont diagonales :  $A_2$  est semblable à  $A_1$  si et seulement si les valeurs propres  $\theta_2$  de  $A_2$  :  $\theta_2 = \theta_1^{\pm 1}$  et la matrice  $B_2$  est semblable  $B_1$  si et seulement si les valeurs propres  $\tilde{\theta}_2$  de  $B_2$  :  $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_1^{\pm 1}$ . On a les deux cas suivant :

1.  $\theta_2 = \theta_1$  ( avec  $\theta_1 \neq \pm 1$ ) et  $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_1$  alors la matrice d'involution  $M = \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  le groupe  $\langle A_i, B_i, M \rangle$  est abélien.
2.  $\theta_2 = \theta_1^{-1}$  (avec  $\theta_1 \neq \pm 1$ ) et  $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_1^{-1}$  alors  $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$  ; on dit que le groupe  $\langle A_i, B_i, M \rangle$  est non abélien, irréductible et diédral.



On obtient la correspondance de l'espace modulaire de connexion sur  $\mathbb{P}_z^1$  et l'espace modulaire de celle sur  $C_2$  en utilisant des propositions (17) et (16). Les propositions 17, 16 et les deux lemmes (1), (2) ci-dessus nous ont permis d'obtenir les résultats suivants

**Théorème 18.** *La déformation isomonodromique d'une  $sl(2)$ -connexion holomorphe sur une courbe de genre 2 provient de la construction précédente, c'est à dire est paramétrée par une solution d'un système de Garnier de rang  $N = 2$  lorsqu'on la restreint au lieu des courbes bi-elliptiques, dès que sa représentation de monodromie, donnée par*

$$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{telles que} \quad [A_1, B_1][A_2, B_2] = I$$

*satisfait*

$$\mathrm{trace}[A_1, B_1] \neq 2$$

*et*

$$A_2 = M^{-1}A_1M \quad \text{et} \quad B_2 = M^{-1}B_1M \quad \text{où} \quad M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{trace}(M) = 0$$

*(i.e.  $M^2 = -I$ ).*

**Théorème 19.** *Considérons une  $sl(2, \mathbb{C})$ -connexion sur la courbe elliptique  $C_\lambda$  avec deux pôles simples en  $t_1$  et  $t_2$  de même exposant  $\theta \notin \mathbb{Z}$ , dont la représentation de monodromie est donnée par*

$$A, B, D_1, D_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{telles que} \quad [A, B] = D_1D_2.$$

*Alors la connexion (ou sa représentation de monodromie) descend sur  $\mathbb{P}^1$  (avec pôles  $0, 1, \infty, t, \lambda$  et exposants  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \theta, \frac{1}{2}$  respectivement) dès que  $\mathrm{trace}[A, B] \neq 2$ .*

### 3.4 Revêtements de degré 6

On veut calculer le revêtement de degré 6 de type ramification  $(3 + 3; 3 + 3; 6)$ , défini de courbe  $C_2$  de genre 2 à valeur dans  $\mathbb{P}_z^1$ , qui se ramifie exactement au-dessus de  $z = 0, 1$  et  $\infty$  avec leur ordre de ramification respectif 3, 3 et 6. Il se ramifie simplement sur une valeur critique en dehors de  $\{0, 1, \infty\}$ .

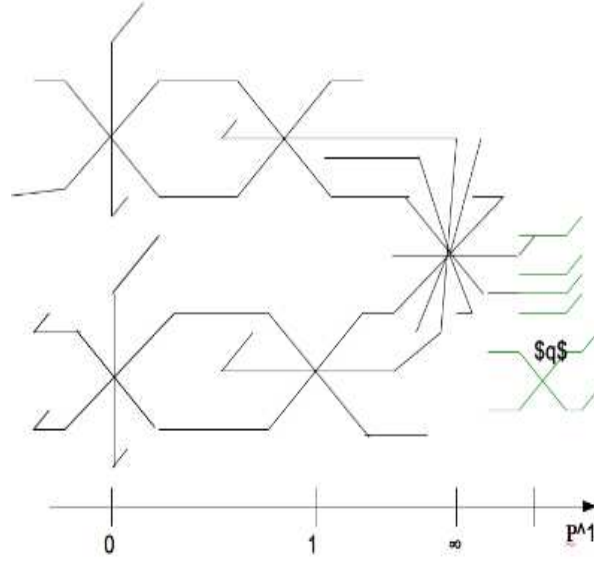


Figure 3.9: Types de Ramification

On reprend les notations de la section 3.3.1. On remarque que le type de revêtement de degré 6 listé dans le tableau ci-dessus, peut être réductible i.e. on peut la décomposer en deux sous-revêtements (revêtement de degré 2 et revêtement de degré 3). Le degré de revêtement se décompose en deux façons suivantes :  $2 \times 2 \times 2$  et  $2 \times 3$ . On examine ces deux décompositions de degré de revêtement et on choisit celle qui est réalisable. Le deuxième élément de la décomposition est la meilleure, transforme l'application rationnelle en composition de deux applications de revêtements dont la première est de degré 2 et la seconde de degré 3 avec type de revêtement de chacun  $(3; 3; 3)$ . Nous allons d'abord déterminer la seconde application  $\tilde{\pi}_1 : E \rightarrow \mathbb{P}^1$  définie de courbe elliptique  $C$  dans  $\mathbb{P}^1$ , avec  $(3, 3, 6)$  l'ordre de monodromie de connexion fuchsienne définie sur  $\mathbb{P}^1_z$ . On veut que l'application  $\tilde{\pi}_1$  se ramifie exactement sur trois points de  $\mathbb{P}^1$  avec l'ordre de ramifications 3 sur la courbe elliptique  $C$ . Cela nous amène à composer à gauche de  $\tilde{\pi}_1$  par l'automorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{P}^1$  qui envoie les quatre valeurs critiques de  $\tilde{\pi}$  sur 0, 1 et  $\infty$  ou à droite de  $\tilde{\pi}_1$  par l'automorphisme de  $C$ . Alors la courbe elliptique peut être définie par l'équation :

$$y^2 = x^3 - 1. \quad (3.7)$$

On va également définir l'application  $f = \tilde{\pi} \circ T : C \rightarrow \mathbb{P}^1_z$  par la composition de fonction  $\tilde{\pi}$  et l'automorphisme de la courbe elliptique  $C$ . L'équation (3.7) de la courbe elliptique  $C$  se normalise à la forme suivante

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \text{ avec } \lambda^2 - \lambda + 1 = 0. \quad (3.8)$$

Rappelons, brièvement la version analytique de la courbe elliptique où  $C = \mathbb{C}/\Lambda$  avec

$\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ , le groupe de transformation de Möbius agit sur la courbe elliptique est engendré par la translation. Soit  $P_0(\lambda_0, y_0)$  un point de  $C$  et  $T : C \rightarrow C; (x, y) \mapsto (x, y) - (\lambda_0, y_0)$  l'automorphisme de  $C$  tel que  $T(\lambda_0, y_0) = \tilde{\pi}^{-1}(\infty)$ . Pour le cas qu'on regarde, on veut que l'application  $f$  se ramifie exactement au dessus de trois points de  $\mathbb{P}^1$ . On souhaite que l'automorphisme de  $C$ , que nous allons construire, envoie l'ensemble de quatre points de branchements  $\{0, 1, \lambda, \infty\}$  sur l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ . Par conséquent, le groupe d'automorphisme de  $C$  est engendré par la transformation fractionnelle, pour tout  $(\lambda_0, y_0) \in C$ ,

$$< (\lambda_0, y_0) \mapsto ((x, y) - (\lambda_0, y_0) + \tilde{\pi}^{-1}(\infty)) >$$

qui se ramifie sur trois points 0, 1 et  $\infty$  de  $\mathbb{P}^1$  dont  $(\lambda_0, y_0)$  même. Par exemple l'application  $f$  est définie par cette manière :

$$f : C \rightarrow \mathbb{P}_z^1$$

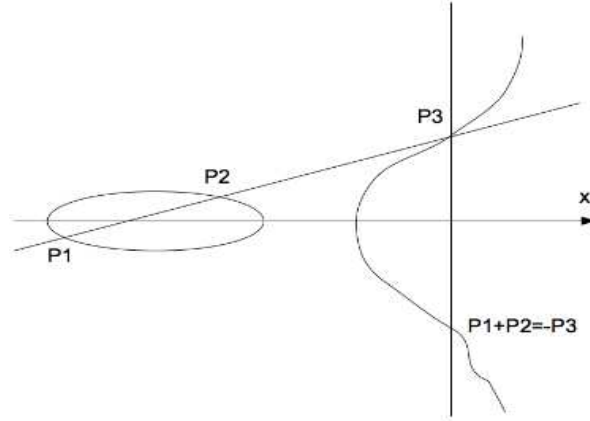
$$(x, y) \mapsto y$$

si  $x = 0$  on a sur la courbe les points suivants  $(0, i)$ ,  $(0, -i)$  et  $(\infty, \infty)$ , l'application sera définie par une transformation qui envoie ces trois points sur 1, 0 et  $\infty$  respectivement. Alors

$$f(x, y) = \frac{1 - iy}{2}.$$

### Loi de groupe sur la courbe elliptique:

Étant considérée une courbe elliptique dans le plan  $(x, y)$ , on peut lui munir une loi de composition d'addition.



L'ensemble de points de courbe elliptique muni de cette loi d'addition admet une structure du groupe. Elle est définie comme suit : choisissons une droite affine  $D$ , d'équation  $y = Ax + B$  où  $A \in \mathbb{C}^*$  et  $B \in \mathbb{C}$ , sur la courbe elliptique qui intersecte la courbe elliptique  $C$  en trois points distincts  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  et  $P_3(x_3, y_3)$ . La

symétrie du troisième point  $P_3$  par rapport à l'axe des abscisses définit la somme des deux premiers points  $P_1 + P_2 = (x_3, -y_3)$ . Son élément neutre est défini par l'infini  $\infty$  noté en général  $O_C$  et l'opposé d'un point pour cette loi de composition est sa symétrie. On peut toujours exprimer les coordonnées du troisième  $P_3(x_3, y_3)$  en fonction des coordonnées des deux premiers points  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$ .

On sait que  $A$  est la pente de la droite  $D$ , alors  $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . La droite  $D$  passe par les points  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  et  $P_3(x_3, y_3)$ , qui sont les points communs avec la courbe elliptique  $C$ , alors  $P_1, P_2$  et  $P_3$  satisfont l'équation de la droite  $D$  :  $y_1 = Ax_1 + B$ ,  $y_2 = Ax_2 + B$  et  $y_3 = Ax_3 + B$ . Alors  $B = y_1 - Ax_1$ . Si on fait l'intersection de la droite  $D$  à la courbe elliptique on obtient trois points distincts sur l'axe des abscisses qui sont des zéros du polynôme de degré 3 en  $x$  :

$$x^3 + A^2x^2 + 2ABx + B^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Après le développement de l'expression à droite de l'équation ci-dessus, on a :  $x_3 = A^2 - x_1 - x_2$ . Il suffit de substituer  $A$  par cette valeur dans les expressions de  $x_3$  et  $y_3$  ; on obtient après le calcul :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(y_2 - y_1)^2 - (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} \\ y_3 &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^3 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_1 + x_2) + y_1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1. \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de  $P_1 + P_2$  sont :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{(y_2 - y_1)^2 - (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} \\ y_3 &= -\left(\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^3 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_1 + x_2) + y_1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1\right). \end{aligned}$$

On fixe maintenant  $(x_1, y_1) = (\lambda, y_0)$ , on cherche  $f = \tilde{\pi} \circ T$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{T} & C \\ & \searrow f = \tilde{\pi} \circ T & \downarrow f \\ & & \mathbb{P}_z^1 \end{array} .$$

La translation  $T : (x_2, y_2) \mapsto (x_3, y_3)$  on a

$$\begin{cases} f(x_3, y_3) = \tilde{\pi} \circ T(x_2, y_2) = \frac{1 - iy_3}{2} = \frac{1 + i(A^3 - (\lambda + x)A + y_0 - \lambda A)}{2} & \text{avec } x \neq \lambda \\ A = \frac{y - y_0}{x - \lambda} \end{cases}$$

Génériquement  $f(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\left(\frac{(y - y_0)^3}{(x - \lambda)^3} - \frac{(x + \lambda)(y - y_0)}{x - \lambda} + y_0 - \frac{\lambda(y - y_0)}{x - \lambda}\right)$ , avec  $x \neq \lambda$ , est une application qui se ramifie exactement sur trois points avec l'ordre de ramification 3. Nous revenons à la courbe elliptique de l'équation (3.7), nous faisons une transformation homographique sur ses trois points de ramifications qui les envoie respectivement sur 0,

1 et  $\lambda$  de l'équation canonique de courbes elliptiques. On sait que 1,  $j$  et  $j^2$  sont les zéros du polynôme  $x^3 - 1$  avec  $j = \exp(\frac{2\pi i}{3})$  alors la transformation fractionnelle, qui envoie ces trois points sur 0, 1 et  $\lambda$  respectivement est définie par  $\varphi(x) = \frac{x-1}{j-1}$ .

On pose  $\varphi(x) = \tilde{x}$ , l'équation  $y^2 = x^3 - 1$  de la courbe elliptique se transforme en équation canonique de  $C_{\lambda_1} : \tilde{y}^2 = \tilde{x}(\tilde{x} - 1)(\tilde{x} - \lambda_1)$  où  $\lambda_1 = -\exp(\frac{\pi i}{3})$  et  $\tilde{y} = \frac{y}{(j-1)\sqrt{j-1}}$ . Si on considère la seconde configuration de revêtement elliptique, on peut dire que ce revêtement elliptique  $C_{\lambda_2}$  obtiendra en faisant une réflexion sur le revêtement elliptique  $C_{\lambda_1}$ . Cette action envoie  $\lambda_1$  sur sa conjuguée  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ . D'après la proposition (15), l'équation de la courbe bi-elliptique au dessus de la courbe elliptique  $C$  est donnée par l'équation:

$$Z^2 = (X^2 - 1)(X^2 + \exp(\frac{\pi i}{3}))(X^2 - 2\exp(\frac{-\pi i}{3})).$$

Ces points de branchement sont sur les points suivants:  $\pm 1$ ,  $\exp(\frac{\pi i}{6})$ ,  $\exp(\frac{13\pi i}{6})$ ,  $\sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{6}}$  et  $\sqrt{2}e^{\frac{11\pi i}{6}}$ . Pour revenir à l'équation de la courbe  $C_2$  de genre 2, on applique encore la proposition (15) il s'agit de construire une transformation qui permute les racines de l'équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0, \\ -1 &\mapsto \infty, \\ e^{\frac{\pi i}{6}} &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Les trois autres points seront envoyés sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  après cette transformation on obtient l'équation de la courbe de genre 2 qui est sous la forme:  $y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)$  avec  $a = (\frac{e^{\frac{\pi i}{6}}+1}{e^{\frac{\pi i}{6}}-1})^2$ ,  $b = (\frac{e^{\frac{\pi i}{6}}+1}{e^{\frac{\pi i}{6}}-1})(\frac{e^{\frac{-\pi i}{6}}-1}{e^{\frac{-\pi i}{6}}+1})$  et  $c = (\frac{e^{\frac{-\pi i}{6}}+1}{e^{\frac{-\pi i}{6}}-1})(\frac{e^{\frac{\pi i}{6}}+1}{e^{\frac{\pi i}{6}}-1})$ .

Pour obtenir la solution algébrique de l'équation isomonodromique on fait une transformation qui envoie les valeurs critiques de  $f$  sur 0, 1,  $\infty$  et la solution algébrique de l'équation isomonodromique.

## Chapter 4

# Calcul explicite de pull-back

Rappelons que le pull-back de l'équation différentielle  $E$  sur  $\mathbb{P}^1$  avec trois pôles simples  $0, 1$  et  $\infty$  à l'équation différentielle fuchsienne  $E'$  sur  $\mathbb{P}^1$  avec sept pôles simples est un revêtement ramifié de sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  tel qu'il se ramifie exactement au dessus de trois points  $0, 1$  et  $\infty$  et sur deux autres points en dehors de  $\{0, 1, \infty\}$ . Dans ce chapitre nous voulons calculer explicitement quelques exemples de ces types de revêtements donnés dans les listes de classifications obtenues dans le chapitre 2 et les solutions algébriques du système (1.11) correspondant. Avant de faire ces calculs on énonce les méthodes de calculs que nous allons utiliser.

### 4.1 Méthode de Calcul de revêtements

On donne brièvement les méthodes de calcul que nous allons utiliser pour déterminer explicitement l'application revêtement  $\phi : \mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^1$ , où  $x$  et  $y$  sont les paramètres. En général, cette méthode est liée au théorème de Belyi dû au problème d'extension des corps de définitions de courbes projectives lisses. Elle a été utilisée pour la première fois par Atkin et Swinnerton-Dyer pour calculer les fonctions de Belyi, et est reprise en une autre version plus simple dans l'article L. Schneps [44] pour déterminer les mêmes fonctions. Une méthode similaire a été utilisée par Vidanus [45] et par Kitaev [29] pour calculer explicitement les Pull-back de triangles de type rigides (fonctions de Belyi) et les pull-back de  $E$  de types isomonodromique à 1 paramètre respectivement. Pour notre cas on se réfère sur les méthodes de calculs donnés par Kitaev et Vidanus pour trouver une algorithmique similaire de calculer les pull-back de l'équation différentielle  $E$  paramétrés par 2 paramètres.

**Théorème 20** (Belyi [2]). *Une surface de Riemann  $X_{g,n}$  est définie sur le corps des nombres algébriques  $\overline{\mathbb{Q}}$  si et seulement s'il existe une fonction méromorphe  $\phi : X_{g,n} \rightarrow \mathbb{P}^1$  tel que ses valeurs critiques sont dans l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ .*

Ce théorème prouve que la surface de Riemann  $X_{g,n}$  est définie par la courbe algébrique  $\{F(x, y) = 0\}$  alors le groupe absolu de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  agit sur les coefficients de la courbe algébrique  $X_{g,n}$  et sur ceux de  $\phi$  ; c'est à dire il transforme le revêtement

$X_{g,n}$  en un autre distinct du précédent. Quant à la fonction  $\phi$ , elle peut être représentée comme une fonction rationnelle à coefficient dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et bien définie, bien sûr à automorphisme de  $X_{g,n}$  près, qui n'est rien d'autre que d'automorphisme de  $\overline{\mathbb{Q}}$  (ou  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ). Sinon l'application  $\phi$  n'est pas uniquement bien définie en générale. Ici, on veut regarder au cas où le genre de la surface de Riemann est nul ( $g = 0$ ), i. e  $X_{0,n} = \mathbb{P}^1$  et deux points distincts de ramifications simples de  $\phi$  sont en dehors de l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ . Alors tous les  $d + 2$  points restant de  $\phi$  sont situés au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$ . Elle est une fonction presque de Belyi et l'automorphisme de  $X_{0,n}$  égale à  $PSL(2, \overline{\mathbb{Q}})$ . En appliquant la méthode de Atkin et Swinnerton-Dyer, on ne considère que des polynômes unitaires sous sa forme développée (pour les formes factorisées voir dans conveignes[7]) et on détermine ses coefficients. L'application est définie par :

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^1 \\ x &\mapsto c \frac{\prod_{j=1} F_j^i(x)}{\prod_{j'=1} H_{j'}^i(x)} = z; \end{aligned}$$

où  $F_j(x) = x^{d_i} + a_{j,d_i-1}x^{d_i-1} + \dots + a_{j,d_1}x + d_0$  et  $H_{j'}(x) = x^{d'_i} + c_{j',d'_i-1}x^{d'_i-1} + \dots + c_{j',d'_1}x + c_{j',d'_0}$  sont des polynômes unitaires sans facteurs communs de degrés respectifs  $d_i$  et  $d'_i$  à coefficients dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  et  $c$  est une constante indéterminée non nulle dans  $\mathbb{C}$ . Les racines de  $F_j(x)$  et  $H_{j'}(x)$  représentent respectivement les zéros et les pôles de fonction  $\phi$ . Les entiers  $d_i$  et  $d'_i$  sont respectivement les nombres de zéros et de pôles de même exposants  $i$ .

Le dessin  $D$  correspondant à une telle fonction presque de Belyi est un graphe tricolore défini par  $\phi^{-1}([0, 1])$  dont ses sommets noirs sont les points au dessus de 0, ses sommets blancs ceux au dessus de 1 et les nombres de faces sont les nombres de cellules. Ils possèdent quelque soit le dessin deux sommets bleus. Les arrêts sont les chemins reliant deux sommets. Les nombres d'arrêts sont donnés par les valences de chaque sommets. Deux sommets de même couleurs ne seront pas liés par l'arrêt, de plus sur chaque arrêts reliant deux sommets noirs à un sommet blanc par le principe noir-blanc-noir (les couleurs noires et blanches sont alternées). Cela montre que les valences de sommets blancs sont toutes égales à 2, on dit que la fonction presque de Belyi  $\phi$  est propre. Si les valences de sommets blancs sont inférieures ou égales à 2, le revêtement  $\phi$  n'est pas propre. On obtient un arbre si le dessin possède une seule face, la fonction presque de Belyi correspond cet arbre est une fonction polynômiale. Pour plus de détailler sur les dessins d'enfant correspondant à  $\phi$  voir (Kitaev [27], L. Schneps [44], J. M. Couveignes [7], A. Zvonkin [32]). On voit que les entiers  $d_i$  et  $d'_i$  sont respectivement les nombres de sommets noirs distincts de même valences  $i$  et les nombres de faces distinctes de même valences  $i$ .

On s'intéresse d'abord aux revêtements propres i.e il ne possède que des sommets blancs de valences 2. Les sommets blancs sont définis par l'équation

$$\phi(x) - 1 = \pm CP^2(x);$$

où  $P(x)$  est un polynôme unitaire de racines distinctes sans facteurs communs avec les polynômes  $H_{j'}$ , le signe (+) si le degré du polynôme au numérateur de  $\phi$  est plus grand

que le degré du polynôme au dénominateur et le signe  $(-)$  si le degré du dénominateur est le plus grand.

**Lemme 5.** Soient  $F$ ,  $H$  et  $P$  trois polynômes unitaires à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ,  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls et soit  $Q(x)$  un polynôme unitaire du second ordre tel que  $\phi(x) - 1 = \pm cP^2(x)$ . Alors

$$\begin{aligned} n.F'(x)H(x) \pm m.H'(x)F(x) &= \pm c_1 Q(x)P(x) \text{ et} \\ 2.P'(x).H(x) \pm m.H'(x)P(x) &= \pm c_2 Q(x).F^{n-1}(x) \end{aligned}$$

si et seulement si  $\phi(x) = \frac{F^n}{H^m}$  est une fonction presque de Belyi.  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes indéterminées.

*Proof.* Supposons que  $\phi(x) = \frac{F^n(x)}{H^m(x)}$ . Alors les racines de

$$\phi'(x) = \frac{n.F^{n-1}(x)F'(x).H^m(x) - m.H^{m-1}.H'(x).F^n(x)}{H^{2m}}$$

sont données par les racines (multiples) de  $F^n(x)$  et des racines simples de  $P(x)$  et de  $Q(x)$ .

$$n.F^{n-1}(x)F'(x).H^m(x) - m.H^{m-1}.H'(x).F^n(x) = \pm c_1.F^{n-1}(x).H^{m-1}.P(x).Q(x).$$

Si on simplifie dans les deux membres de l'égalité les termes  $H^{m-1}$  et  $F^{n-1}$  on obtient la première égalité à chercher. Posons  $h(x) = \frac{P^2(x)}{H^m(x)}$ . D'après l'hypothèse les racines de

$$h'(x) = \frac{2.P(x).P'(x).H^m - m.H^{m-1}(x).H'(x).P^2(x)}{H^{2m}}$$

sont les racines (multiples) de  $P^2(x)$  et deux racines simples supplémentaires qui sont zéros de  $Q(x)$  et des racines multiples de  $F^{n-1}$  et de  $H^m$ , alors

$$2.P(x).P'(x).H^m - m.H^{m-1}(x).H'(x).P^2(x) = \pm c_2.P(x).H^{m-1}.Q(x).F^{n-1}.$$

La simplification de  $H^{m-1}$  et  $P(x)$  dans les deux membres de l'équation donne la seconde égalité.

Si on suppose vrai les deux égalités. On voit que la première égalité est effectivement proportionnelle à dérivée logarithmique de  $\phi(x)$ , on pose :

$$\log(\phi(x))' = \pm c_1 \cdot \frac{Q(x)P(x)}{F(x).H(x)},$$

et la seconde égalité est proportionnelle à dérivée logarithmique de  $\phi(x) - 1$ , on a :

$$\log(\phi(x) - 1)' = \pm c_2 \frac{Q(x).F^{n-1}(x)}{P(x).H(x)}.$$

La résolution de ces deux équations impliqueront que :



$$\phi(x) = \frac{F^n(x)}{H^m(x)} \text{ et } \phi(x) - 1 = \pm c.P^2(x).$$

□

Au calcul nous allons utiliser les égalités de lemme précédent pour déterminer les fonctions  $\phi(x)$  et  $\phi(x) - 1$ . Ces deux équations donnent deux systèmes d'équations avec les coefficients des polynômes  $F(x)$ ,  $H(x)$ ,  $P(x)$  et  $Q(x)$ . Il y a plusieurs façon de résoudre ces systèmes soit par élimination habituelle des inconnues, soit par la méthode de déterminant (Syzygie) etc. Ici, on a utilisé la méthode d'élimination de Groebner (implanté sur Maple.11) dans le package Basis Groebner. La résolution de ces systèmes donnent plusieurs solutions, chaque solution donne une fonction presque de Belyi (revêtement à un ou deux paramètres). En général parmi toutes ces solutions, on obtient une seule solution qui est déterminée par deux paramètres et elle définit le revêtement souhaité. Les calculs deviennent souvent plus compliqués, pour éviter ces difficultés on fait agir de transformations homographiques sur le dessin pour baisser les ordres locaux de certains points critiques ou en normalisant par homographie certains points de plus grand degré à 0 ou à 1 ou à  $\infty$  en respectant certains critères (voir [44] pour ces critères). Le calcul n'est pas beaucoup compliqué si le degré  $d$  de revêtement est inférieur ou égal à 4.

Tous les calculs d'ici ont été fait sur Maple.11 installé sur l'ordinateur Mac version 10.6.7 Processeur 2.4 GHz intel Core 2 Duo ; Mémoire 4 Go 1067 MHz DDR3.

## 4.2 Solutions algébriques de Garnier

On considère la forme normalisée de transformation pull-back  $\phi(x)$  de l'équation de  $E$ , c'est à dire l'ensemble de ses points critiques non apparents est un sous-ensemble de  $\{0, 1, t_1, t_2, \infty\}$ . On dit dans ce cas que  $\phi(x)$  est une fonction presque spéciale. Les solutions algébriques du système différentielle de Garnier sont déterminées par les deux zéros distincts  $q_1(u, v)$  et  $q_2(u, v)$  du polynôme  $Q(x)$  et les paramètres  $t_1(u, v)$  et  $t_2(u, v)$ , où  $u$  et  $v$  sont des paramètres dans  $\mathbb{C}^*$ , tels que  $t_1$  et  $t_2 \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ ,  $t_1 \neq t_2$ . On énonce un résultat similaire à celui de Kitaev.

**Théorème 21.** *Soient  $p_0, p_1, p_\infty$  les entiers naturels, tels que  $p_\infty \geq p_1 \geq p_0 \geq 2$ . Soit  $\phi : \mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathbb{P}_z^1$  une transformation pull-back, de degré  $d$ , de l'équation différentielle  $E$  paramétrée par  $t_1, t_2$ . Si l'application  $\phi$  satisfait les conditions suivantes :*

- *le revêtement  $\phi(x) = z$  est ramifié au dessus des points  $z = 0, z = 1, z = \infty$  ; il y a deux points distincts de ramifications simples sur  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  et il n'y a pas d'autres points ramifiés.*
- *Les points  $x = 0, x = 1, x = t_1, x = t_2, x = \infty$  sont des points situés au dessus de l'ensemble  $\{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{P}^1$ .*
- *Les points de l'ensemble  $\{\phi^{-1}(0)\} \setminus \{0, 1, t_1, t_2, \infty\}$  sont tous ramifiés avec l'ordre  $p_0$ . Les points de l'ensemble  $\{\phi^{-1}(1)\} \setminus \{0, 1, t_1, t_2, \infty\}$  sont tous ramifiés avec*

l'ordre  $p_1$ . Les points de  $\{\phi^{-1}(\infty)\} \setminus \{0, 1, t_1, t_2, \infty\}$  sont aussi tous ramifiés avec l'ordre de ramification  $p_\infty$ .

On note  $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_{t_1}, \tilde{p}_{t_2}, \tilde{p}_\infty$  les ordres de ramifications à  $x = 0, 1, t_1, t_2, \infty$  respectivement. Alors les points  $x = q_1, x = q_2$ , expriment en fonction de  $t_1$  et  $t_2$ , sont des solutions algébriques complètes du système de Garnier (1.11) avec des monodromies locales  $\frac{\tilde{p}_0}{p_0}, \frac{\tilde{p}_1}{p_1}, \frac{\tilde{p}_{t_1}}{p_{t_1}}, \frac{\tilde{p}_{t_2}}{p_{t_2}}, 1 - \frac{\tilde{p}_\infty}{p_\infty}$ ,

*Proof.* La preuve est la même que celle du théorème 3.1 (Kitaev [30]). Il suffit, tout simplement, de partir avec  $d + 4$  points au lieu de  $d + 3$  chez Kitaev.  $\square$

## 4.3 Exemples pull-back hypergéométriques:

### 4.3.1 Revêtements de degré 4:

On veut calculer explicitement le revêtement de degré 4 du tableau (2.1) muni du type de ramification  $(2+2; 3+1; 1+1+1+1)$  en appliquant le lemme (5). Ce type de ramification est le même que le type  $(2+2; 1+1+1+1; 3+1)$  par homographie près à gauche de l'application  $\phi$ . La transformation linéaire fractionnelle  $\varphi(x)$  agissant sur le dessin correspondant à  $\phi(x)$  fixe le point non ramifié  $x = \infty$  au dessus de  $z = \infty$ , les points  $x = 0, x = 1, x = t_1$  et  $x = t_2$  sur  $z = 1$ . Cette transformation linéaire fractionnelle (automorphisme de  $\mathbb{P}_x^1$ ) devient trivial, puisqu'elle a fixé les points  $x = 0, 1, \infty$ , et les deux points de ramifications simples et libres sont les deux racines distinctes de l'équation  $Q(x) = 0$ . On considère génériquement le revêtement sous la forme normalisée :

$$\phi(x) = -\frac{c^3}{a_0^2} \frac{F^2(x)}{H^3(x)}; \phi(x) - 1 = -\frac{c^3}{a_0^2} \frac{P(x)}{H^3(x)}; \quad (4.1)$$

où

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + a_1x + a_0, \\ P(x) &= x(x-1)(c^3x^2 - (a_0^2 + 2c^3a_1 + c^3)x - 2c^3a_0 - c^3a_1^2 - c^3 - 2c^3a_1 - a_0^2 + 3a_0^2c), \\ H(x) &= x - c \end{aligned}$$

sont des polynômes unitaires dont ses zéros sont situés au dessus des points  $z \in \{0, 1, \infty\}$  et ses coefficients  $a_i$  et  $c$  sont des éléments de  $\mathbb{C}$  et  $C = -\frac{c^3}{a_0^2}$  est une constante complexe indéterminée. Les racines de  $F(x)$  et  $H(x)$  sont des points critiques apparents d'ordre 2 et d'ordre 3 de  $\phi$  qui se trouvent respectivement au dessus de  $z = 0$  et de  $z = \infty$  et celles de polynôme  $P(x)$  sont des points critiques non-ramifiés, qui sont des vraies singularités de l'équation différentielle  $E'$ . On rappelle que ces singularités sont normalisées par homographie à  $0, 1, t_1, t_2$  et  $\infty$ . Puisqu'on a choisi  $x = \infty$  à l'ordre 1 au dessus de  $z = \infty$  alors la constante

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x}.$$

Pour obtenir les points critiques simples libres, on considère maintenant l'équation de la dérivée logarithmique de  $\phi(x)$  ou de  $\phi(x) - 1$  :

$$C_1 Q(x) F(x) = 2F'(x)H(x) - 3H'(x)F(x); \quad (4.2)$$

où  $Q(x) = -x^2 + (4c + a_1)x + 2a_1c + 3a_0$  et  $C_1$  est une constante indéterminée. On peut facilement voir que la constante indéterminée  $C_1$  dans l'équation de dérivée logarithmique de  $\phi$  est égale à l'ordre du point  $x = \infty$  d'où  $C_1 = 1$ . Le numérateur de dérivé logarithmique de  $\phi$  donne le produit de l'équation donnant des points critiques situés sur 0 et l'équation de points critiques simples, libres qui sont normalisés par transformation linéaire fractionnelle  $q_1$  et  $q_2$ . Pour déterminer les coefficients inconnus  $a_i$  et  $c$  on impose la condition  $\phi(1) = 1$  sur l'application  $\phi(x)$  et on obtient la paramétrisation rationnelle de l'équation obtenue entre les coefficients de  $\phi$  :

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{1 - s^2}; \\ a_1 &= a_0(s^3 - 1) - 1. \end{aligned}$$

Si on substitue ces coefficients  $a_1$  et  $c$  par leur valeurs dans l'expression de  $\phi(x)$  ; l'application  $\phi(x)$  sera paramétrée par  $a_0$  et  $s$ . On peut exprimer les deux autres points critiques non apparents  $t_1$  et  $t_2$  en résolvant l'équation  $\frac{\phi(x)-1}{x(x-1)} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-a_0^2 + 3a_0^2s^2 - 3a_0^2s^4 + a_0^2s^6 - 2a_0s^3 + 2a_0 + 1)x - 2a_0^2s^3 - a_0^2 + 2a_0 + 3a_0^2s^2 = 0.$$

On veut que les points non apparents  $t_1$  et  $t_2$ , solutions de l'équation ci-dessus, soient des fonctions rationnelles (fonctions uniformes). Pour cela on construit un revêtement double ramifié sur le discriminant de l'équation puis on en déduit

$$a_0 = \frac{(-1+t)(t+1)}{(s+1)(st-t+s+1)(st-t-1-s)}.$$

On a une première valeur de  $t_1$  et  $t_2$  :

$$t_1 = \frac{-(t+1)(st-t-1-3s)}{(st-t-1-s)^2(s+1)}, \quad t_2 = -\frac{(-1+t)(st-t+1+3s)}{(st-t+s+1)^2(s+1)}.$$

Les coefficients de l'expression de revêtement (4.1) s'exprimeront à nouveau en fonction des paramètres  $s$  et  $t$ . L'équation différentielle fuchsienne  $E'$  obtenue par pull-back  $\phi$  possède cinq vrais points singuliers et deux apparents :  $x = 0, 1, \infty$  et les deux autres points sont donnés par les racines de l'équation  $P(x) = 0$ . On cherche maintenant les deux points critiques simples et libres. Pour cela, on considère le polynôme  $Q(x)$  qui s'exprime également en fonction des paramètres  $s$  et  $t$ . Les deux points critiques libres de  $\phi$  sont donnés par des racines de l'équation  $Q(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{t^2s^3+3s^3-4t^2s^2+4s^2+5t^2s+7s+2-2t^2}{(s-1)(s+1)(st-t+s+1)(st-t-1-s)}x - \frac{(st-t+1+3s)(st-t-1-3s)}{(s+1)^2(st-t+s+1)(st-t-1-s)(s-1)} = 0$$

La recherche des solutions rationnelles de cette équation ; lui impose, en effet, que son discriminant soit le produit de termes de puissances paires. On calcule son discriminant

$$D = s^2(s+1)^2 F(s, t);$$

avec  $F(s, t) = s^4 t^4 + 6s^4 t^2 + 9s^4 - 4t^4 s^3 - 56t^2 s^3 + 60s^3 + 6t^4 s^2 + 100t^2 s^2 + 118s^2 - 4t^4 s - 56t^2 s + 60s + t^4 + 6t^2 + 9$ .

Le terme de puissance impaire  $F(s, t) = 0$  est une courbe algébrique irréductible sur  $\mathbb{Q}$  mais réductible sur  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , avec  $\alpha^2 + 3 = 0$ . Elle se décompose en réunion de deux coniques  $F_1$  et  $F_2$  qui s'intersectent en quatre points où

$$\begin{aligned} F_1(s, t) &= t^2 + 2t\alpha - 3 - 2t^2 s - 4st\alpha - 10s + t^2 s^2 + 2s^2 t\alpha - 3s^2 \\ F_2(s, t) &= t^2 s^2 - 2s^2 t\alpha - 3s^2 - 2t^2 s + 4st\alpha - 10s + t^2 - 2t\alpha - 3. \end{aligned}$$

L'objectif est toujours de rationaliser l'équation  $Q(x) = 0$ , alors on transforme birationnellement ces deux coniques par l'isomorphisme

$$(s, t) \mapsto (s = -\frac{4u(v'u + 2)}{u^2 - 3 - uv'}, t = -\frac{3u^2 + v'u - 1}{u^2 - 3 - v'u}),$$

en coniques  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$ . Cette transformation birationnelle nous permettra de paramétrer les coniques et le plan par les pinceaux de coniques et les pinceaux de droites passant par les 4 points intersections. Les deux nouvelles équations de  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  se factorisent en produit de droites de puissances paires sauf deux facteurs d'exposant impairs, passons à nouveau de revêtement double

$$v^2 = \frac{-2\alpha + v'}{2\alpha + v'}$$

ramifié sur la courbe désingularisée  $\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2$ . Ces transformations rendent l'équation  $Q(x) = 0$  rationnelle, et les coefficient de revêtement  $\phi(x)$  après ces transformations s'expriment dans les nouvelles coordonnées  $(u, v)$ . On peut explicitement déterminer les solutions algébriques complètes du système de Garnier paramétrées par une surface rationnelle  $T \rightarrow \mathbb{P}_{t_1}^1 \times \mathbb{P}_{t_2}^1$ , qui est revêtement ramifié de degré 8 telle que chaque  $t_i$  ramifie sur  $t_i = 0, 1, \infty$  et  $t_1 = t_2$ . Elles sont explicitement données par :

$$\begin{aligned} t_1(u, v) &= -\frac{1}{52}(353 + 9\alpha)(-4\alpha u^2 + 2uv^2 - 2u - v^2 + 1 + 13u^2 v^2 + 11u^2 + 4\alpha uv^2 \\ &\quad - 4\alpha u - 2\alpha v^2 + 2\alpha)u(2v - 1 + \alpha)(2v + 1 - \alpha)(uv + u + \alpha v - \alpha)^2(uv - u \\ &\quad + \alpha v + \alpha)^2 / ((u + 1)(u^2 v^2 - u^2 - 2\alpha uv^2 - 2\alpha u + v^2 - 1)(v + 1)(v - 1)(\alpha v \\ &\quad - 2v + \alpha - 2 + 7uv + u - 4\alpha u)^2(\alpha v - 2v + 2 - \alpha + 7uv - u + 4\alpha u)^2); \\ t_2(u, v) &= \frac{1}{52}(9\alpha - 353)(-v^2 + 1 + 13u^2 v^2 + 11u^2 + 4\alpha u^2 - 2uv^2 + 2u + 2\alpha v^2 \\ &\quad - 2\alpha + 4\alpha uv^2 - 4\alpha u)u(2v - 1 - \alpha)(2v + 1 + \alpha)(uv + u + \alpha v - \alpha)^2(uv \\ &\quad - u + \alpha v + \alpha)^2 / ((u - 1)(u^2 v^2 - u^2 - 2\alpha uv^2 - 2\alpha u + v^2 - 1)(v + 1)(v \\ &\quad - 1)(2v + \alpha v - 2 - \alpha + 7uv - u - 4\alpha u)^2(2v + \alpha v + 2 + \alpha \\ &\quad + 7uv + u + 4\alpha u)^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1(u, v) &= -\frac{7}{2}(uv - u + \alpha v + \alpha)u(2v + 1 - \alpha)(2v + 1 + \alpha)(uv + u + \alpha v \\
&\quad - \alpha)^2 / ((u^2 v^2 - u^2 - 2\alpha uv^2 - 2\alpha u + v^2 - 1)(\alpha v - 2v + 2 - \alpha + 7uv - u \\
&\quad + 4\alpha u)(2v + \alpha v - 2 - \alpha + 7uv - u - 4\alpha u)(v + 1)); \\
q_2(u, v) &= -\frac{7}{2}(uv + u + \alpha v - \alpha)u(2v - 1 + \alpha)(2v - 1 - \alpha)(uv - u + \alpha v \\
&\quad + \alpha)^2 / ((u^2 v^2 - u^2 - 2\alpha uv^2 - 2\alpha u + v^2 - 1)(2v + \alpha v + 2 + \alpha + 7uv + u \\
&\quad + 4\alpha u)(\alpha v - 2v + \alpha - 2 + 7uv + u - 4\alpha u)(v - 1)).
\end{aligned}$$

On peut trouver ses coordonnées de Darboux  $(P_i, q_i)$  en utilisant le système 1.11 qui n'est pas facile dans cette situation. Ici, on donne les résidus  $H_1$  et  $H_2$  (Hamiltoniens) à  $t_1$  et  $t_2$  de l'équation obtenue  $E' = \phi^* E$  sous la forme normale. Si on suggère que les points  $q_1$  et  $q_2$  sont des singularités apparente de l'équation  $E'$  cela nous permet de trouver explicitement  $H_1$  et  $H_2$  avec des paramètres  $(\theta, \theta, \theta, \theta, \frac{1}{3})$  :

$$\begin{aligned}
H_1 &= - (t_1 - q_1)(-q_2 + t_1)(q_1(q_1 - 1)(q_1 - t_2)(P_1^2 - (\frac{\theta + 1 - t_1}{q_1} + \frac{\theta + t_1}{q_1 - 1} + \frac{\theta - 1}{q_1 - t_1} \\
&\quad + \frac{\theta}{q_1 - t_2})P_1 + \frac{1}{4} \frac{(4\theta - 1)^2 - \frac{1}{3}}{q_1(q_1 - 1)}) / (q_1 - q_2) + q_2(q_2 - 1)(q_2 - t_2)(P_2^2 \\
&\quad - (\frac{\theta + 1 - t_1}{q_2} + \frac{\theta + t_1}{q_2 - 1} + \frac{\theta - 1}{q_2 - t_1} + \frac{\theta}{q_2 - t_2})P_2 + \frac{1}{4} \frac{(4\theta - 1)^2 - \frac{1}{3}}{q_2(q_2 - 1)}) / (q_2 \\
&\quad - q_1)) / (t_1(t_1 - 1)(t_1 - t_2)); \\
H_2 &= - (t_2 - q_1)(t_2 - q_2)(q_1(q_1 - 1)(q_1 - t_1)(P_1^2 - (\frac{\theta + 1 - t_2}{q_1} + \frac{\theta + t_2}{q_1 - 1} + \frac{\theta}{q_1 - t_1} \\
&\quad + \frac{\theta - 1}{q_1 - t_2})P_1 + \frac{1}{4} \frac{(4\theta - 1)^2 - \frac{1}{3}}{q_1(q_1 - 1)}) / (q_1 - q_2) + q_2(q_2 - 1)(q_2 - t_1)(P_2^2 \\
&\quad - (\frac{\theta + 1 - t_2}{q_2} + \frac{\theta + t_2}{q_2 - 1} + \frac{\theta}{q_2 - t_1} + \frac{\theta - 1}{q_2 - t_2})P_2 + \frac{1}{4} \frac{(4\theta - 1)^2 - \frac{1}{3}}{q_2(q_2 - 1)}) / (q_2 \\
&\quad - q_1)) / (t_2(t_2 - 1)(t_2 - t_1)).
\end{aligned}$$

#### 4.3.2 Expression explicite de revêtements de degré 6:

Ici, on calcule explicitement le revêtement de degré 6 muni le type de ramification

$$(3 + 3; 2 + 2 + 2; 2 + 1 + 1 + 1 + 1). \quad (4.3)$$

Il correspond au pull-back de l'équation hypergéométrique avec ordre de monodromie  $(2, 3, p_\infty)$  (dans le tableau (2.1)) et de l'équation euclidienne avec triplet euclidien  $(2, 3, 6)$  dans la preuve de proposition (11) ( $k = 1$  premier énoncé de  $(2, 3, 6)$ ). On fixe, par transformation linéaire fractionnelle, le point ramifié simple de revêtement à  $x = \infty$  (d'ordre 2) et les points non ramifiés à  $x = 0, 1, t_1, t_2$  tous au dessus du point  $z = 1$ . Ce nouveau type de ramification de  $\phi(x)$  est équivalent à homomorphie près au type (4.3). Comme les cas précédents on choisit, par la même transformation linéaire fractionnelle,

les deux points ramifiés simples et libres de  $\phi$  qui sont des racines de l'équation  $Q(x) = 0$  notés  $x = q_1$  et  $x = q_2$ . Le revêtement est génériquement donné par :

$$\phi(x) = C \frac{F^2(x)}{H^3(x)}; \quad (4.4)$$

où

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ H(x) &= x^2 + b_1x + b_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes inconnues et  $C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x^2}$  est une constante indéterminée non nulle dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $x = \infty$  est fixé sur  $z = 1$  avec l'ordre de ramification 2 alors  $C = 1$ , on considère la dérivée logarithmique de  $\phi$

$$2F'(x)H(x) - 3F(x)H'(x) = C_1Q(x)F(x); \quad (4.7)$$

avec  $Q(x)$  polynôme en  $x$  du second ordre, la constante  $C_1 = 2$  l'ordre de point critique  $x = \infty$ . Les relations coefficients de l'équation (4.7) donnent deux systèmes d'équations. L'ordre de ramification de  $x = \infty$  sur  $z = 1$  est égal à 2, si  $a_2 = \frac{3}{2}b_1$ . Les points  $x = 0, 1$  fixés sur le point  $z = 1$  donnent des relations entre les coefficients de revêtement  $\phi(x)$  paramétrés par deux paramètres

$$\begin{cases} a_0 &= v^3; \\ b_0 &= v^2; \\ b_1 &= b^2 - v^2 - 1; \\ a_2 &= \frac{3}{2}b^2 - \frac{3}{2}v^2 - \frac{3}{2}; \\ a_1 &= b^3 - v^3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}v^2. \end{cases}$$

Les deux autres points non ramifiés sont déterminés par la condition ci-dessous

$$\frac{\phi(x)-1}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4v^3-4b^4+4b^3-8vb^3-1+8bv^3+3b^2-2b+2v+3v^2+6bv+4v^4}{-6bv-3b^2-3v^2+1+2b-2v}x - \frac{4v^3-8bv^3-4v^4}{-6bv-3b^2-3v^2+1+2b-2v} = 0.$$

Les points singuliers non apparents  $t_1$  et  $t_2$  de l'équation fuchsienne  $E'$  sont exactement donnés par les racines de l'équation  $\frac{\phi(x)-1}{x(x-1)} = 0$ . On obtient l'expression explicite du polynôme  $Q(x)$  par la relation (4.7) :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (-3b^2 + 2b - 6bv + 1 - 3v^2 - 2v)x^2 \\ &\quad + (b^2 - 1 + 2v^3 - 2b + 4bv^2 + 2b^3 + 2v + 5v^2 + 6bv + 4vb^2)x - 4bv^2 - 2v^3 - 2v^2 \end{aligned}$$

Les solutions algébriques complètes du système de Garnier sont déterminées par les racines de deux équations précédentes. On voit que ces solutions algébriques sont rationnelles sur des courbes hyperelliptiques de genre 1 et de genre 2 respectivement. On

a explicitement les solutions algébriques du système de Garnier :

$$\begin{aligned}
t_1(u, v) &= 3456v^3(306v + 224v^2 - 384v^3 + 512v^4 - 512v^5 - 81 + 96uv^2 - 54u + 156uv \\
&\quad + 18u^2v - 9u^2 - 8wv + 9w - 32wv^2 + 3wu)/((9u^2 + 96uv^2 - 336uv + 54u \\
&\quad + 5120v^3 + 1120v^2 + 256v^4 + 81 - 1008v)(-8v + 9 + 3u + 16v^2)^2); \\
t_2(u, v) &= \frac{1}{4}(-43046721 - 86093442u + 803538792v + 77309411328v^{15} \\
&\quad + 11171126016v^3 - 4744705248v^2 - 5542732800v^4 + 113799856128v^{12} \\
&\quad - 27160510464v^5 - 30182211584v^{10} - 49928994816v^{14} + 4294967296v^{16} \\
&\quad + 226748160wv^2 - 12754584wv - 1082130432wv^{10} + 23887872v^5u^4 \\
&\quad + 1377495072uv - 7023524256uv^2 - 26549944320v^{11} - 31886460u^3 \\
&\quad - 1679616v^2w^3u + 2301696v^3w^3u + 52488vw^3u^2 + 51228288uv^2w^2 \\
&\quad - 377487360wv^{11}u + 4230144u^4v^4w + 13271040uv^7w^2 - 71744535u^2 \\
&\quad - 977536512wv^3 + 1291935744v^5w + 157464vw^3 - 45816192v^3w^2 \\
&\quad - 16533720vw^2 + 1238436864v^4w + 108873646080v^9 + 15925248v^6w^3 \\
&\quad + 956593800u^2v + 729907200v^6u^3 - 6928416u^5v^2 + 4831838208v^{14}u \\
&\quad - 1492992v^5u^5 + 79626240v^8u^4 - 15925248v^7u^4 + 157464w^2u^3 + 13122w^2u^4 \\
&\quad - 17496u^4vw^2 + 21592276992v^{11}u + 234455040v^7u^3 + 5668704u^5v \\
&\quad + 10824192v^4u^4 + 30765219840v^{10}u + 4349362176v^8u^2 + 3114270720v^9u^2 \\
&\quad - 93312u^3v^3w^2 - 52488vwu^5 + 1811939328v^9wu - 98205696v^7wu^2 \\
&\quad - 54908928v^5wu^3 - 3359232v^3wu^4 - 21257640vwu + 2799360wv^2u^4 \\
&\quad - 1212678144wv^8u - 46006272wv^6u^2 + 5971968u^5v^6 + 1062882w^2 \\
&\quad - 3513778176v^9w - 424673280v^8wu^2 - 2488320v^5wu^4 + 18579456v^6wu^3 \\
&\quad - 68594688w^2uv^4 + 64696320w^2uv^5 - 35831808w^2uv^6 - 2332800w^2u^2v^3 \\
&\quad - 9331200w^2u^2v^4 + 13156992w^2u^2v^2 + 2519424u^5v^3 + 41803776wv^4u^3 \\
&\quad - 787320wvu^4 + 1492992v^4w^3u + 497664v^5w^3u + 93312v^3w^3u^2 \\
&\quad - 279936v^2w^3u^2 + 5832vu^3w^3 - 93312v^3wu^5 - 141557760v^9wu^2 \\
&\quad - 26542080v^7wu^3 + 1417176uw^2 + 6618611712wv^{11} - 188006400w^2v^6 \\
&\quad - 87588864w^2v^7 + 219414528w^2v^8 + 69148090368v^6 - 47658074112v^7 \\
&\quad - 36219715584v^8 + 62985600v^2w^2 - 7971615u^4 - 1062882u^5 - 59049u^6 \\
&\quad + 157464u^6v + 1026432w^2u^3v^2 - 769824w^2u^3v - 1045560960wuv^3 \\
&\quad + 708588u^2w^2 + 279936u^6v^3 + 186624v^4u^6 + 65691648v^6u^4 \\
&\quad - 905969664v^{12}u + 8833204224v^{10}u^2 + 1889796096v^8u^3 - 5598720u^5v^4 \\
&\quad + 12004098048v^{11}u^2 + 51942260736v^{13}u + 934281216v^9u^3 \\
&\quad + 687341568v^8w - 414720w^4v^3 + 28311552w^2v^9 - 402653184wv^{13} \\
&\quad - 7449083904wv^{12} + 2264924160v^{12}u^2 + 566231040v^{10}u^3 - 154314720v^2u^4 \\
&\quad + 33592320wu^3v^2 + 3653074944v^7w + 6065280v^3w^3 + 206309376v^5w^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5380964352v^6w - 2519424v^2w^3 - 113177088v^4w^2 + 1169572608v^3u^3 \\
& +90699264v^3u^4 - 17206345728v^8u + 35078012928v^9u + 139968u^6v^2 \\
& -2408569344uv^4 - 29138724864uv^5 + 51233513472uv^6 + 13415932800uv^3 \\
& +5968515456u^2v^3 + 686962944u^2v^4 - 4081466880u^2v^2 + 81648w^4v \\
& -90720w^4v^2 + 27216w^4uv - 7776w^4uv^2 - 21430656uv^3w^2 \\
& -3548381184wv^{10}u - 1152636480u^3v^2 + 340122240u^3v + 63772920vu^4 \\
& -4374w^4u + 942243840v^7u^2 - 9901522944v^5u^2 - 983715840v^5u^3 \\
& +379219968v^4u^3 - 729w^4u^2 - 6561w^4 + 11123785728v^6u^2 \\
& +50063212544v^{13} - 396389376u^2wv^3 - 5983632vu^2w^2 - 4723920vwu^3 + 157464vuw^3 \\
& +609878016v^7uw - 61399296v^3wu^3 - 2157871104v^6wu + 745666560v^5uw \\
& +274212864v^4wu^2 - 37324800v^5u^2w - 15618244608v^7u + 884736v^7w^3 - 20736w^4v^4 \\
& +1714176v^4w^3 - 19077120v^5w^3 + 302330880uvw^2 - 14171760vwu^2 \\
& +151165440u^2wv^2 + 1492992u^2v^5w^2 - 17006112uvw^2 + 973430784uv^4w)/((9u^2 \\
& +96uv^2 - 336uv + 54u + 5120v^3 + 1120v^2 + 256v^4 + 81 - 1008v)(-8v + 9 \\
& +3u + 16v^2)^2(432u^2v^2 - 189u^2 + 504u^2v + 4608uv^4 + 4032uv + 18wu - 384uv^3 \\
& -1134u - 1824uv^2 - 216vwu - 1701 + 12288v^6 + 7040v^3 - 696wv + 27w^2 + 7560v \\
& -10704v^2 + 1536wv^2 - 16384v^5 - 1152wv^3 + 54w + 14848v^4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1(u, v) &= \frac{1}{4}(-32805 + 174960v - s - 32805u + 2187w + 370368v^3 - 311040v^2 \\
& +187392v^4 + 802816v^6 - 488448v^5 - 147456v^7 + 262144v^9 - 1215u^3 \\
& -10935u^2 - 51456wv^3 + 1458wu + 27648v^5u^2 + 147456v^7u + 38880u^2v \\
& +145800uv - 134784uv^2 + 147456uv^6 - 129024uv^5 + 10944wuv^2 \\
& -9216wuv^4 - 864wu^2v^2 - 6912wuv^3 - 1728wu^2v + 405w^2 + 42336wv^2 \\
& -19440wv + 288w^2v - 1152w^2v^2 + 1152w^2v^3 + 6144wv^4 - 24576wv^6 \\
& +12288wv^5 + 95040uv^3 + 285696uv^4 + 55296u^2v^4 + 5184u^2v^2 - 1728u^2v^3 \\
& +5184u^3v^2 + 3240u^3v + 135w^2u + 1728v^3u^3 + 243wu^2 - 27w^3 \\
& -11664vwu + 216w^2uv)/((9 - 8v + 16v^2 + 3u)(12288v^6 - 16384v^5 \\
& +4608uv^4 + 14848v^4 - 384uv^3 - 1152wv^3 + 7040v^3 + 1536wv^2 - 10704v^2 \\
& +432u^2v^2 - 1824uv^2 - 216vwu + 7560v + 4032uv - 696wv + 504u^2v - 1134u \\
& -1701 + 18wu - 189u^2 + 54w + 27w^2)); \\
q_2(u, v) &= \frac{1}{4}(-32805 + 174960v + s - 32805u + 2187w + 370368v^3 - 311040v^2 \\
& +187392v^4 + 802816v^6 - 488448v^5 - 147456v^7 + 262144v^9 - 1215u^3 \\
& -10935u^2 - 51456wv^3 + 1458wu + 27648v^5u^2 + 147456v^7u + 38880u^2v \\
& +145800uv - 134784uv^2 + 147456uv^6 - 129024uv^5 + 10944wuv^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -9216wuv^4 - 864wu^2v^2 - 6912wuv^3 - 1728wu^2v + 405w^2 + 42336wv^2 \\
& -19440wv + 288w^2v - 1152w^2v^2 + 1152w^2v^3 + 6144wv^4 - 24576wv^6 \\
& +12288wv^5 + 95040uv^3 + 285696uv^4 + 55296u^2v^4 + 5184u^2v^2 - 1728u^2v^3 \\
& +5184u^3v^2 + 3240u^3v + 135w^2u + 1728v^3u^3 + 243wu^2 - 27w^3 \\
& -11664vwu + 216w^2uv)/((9 - 8v + 16v^2 + 3u)(12288v^6 - 16384v^5 \\
& +4608uv^4 + 14848v^4 - 384uv^3 - 1152wv^3 + 7040v^3 + 1536wv^2 - 10704v^2 \\
& +432u^2v^2 - 1824uv^2 - 216vwu + 7560v + 4032uv - 696wv + 504u^2v \\
& -1134u - 1701 + 18wu - 189u^2 + 54w + 27w^2));
\end{aligned}$$

où

$$w^2 = \frac{1}{27}(32v^2 + 8v - 9 - 3u)(256v^4 + 128v^3 + 96uv^2 - 128v^2 + 24uv + 288v - 162 - 27u + 9u^2).$$

## 4.4 Quelques exemples pull-back euclidiens

### 4.4.1 Pour le triangle $(2, 2, \infty)$

#### Revêtements de degré 3

Cela correspond  $k = 1$  au deuxième énoncé de triplet  $(2, 2, \infty)$  dans la preuve de proposition (11) et son type de ramification est  $(2 + 1; 2 + 1; 1 + 1 + 1)$ . C'est le cas où le dessin d'enfant correspondant n'est pas propre. On choisit génériquement le revêtement sous la forme

$$\phi(x) = C \frac{F_1(x)F_2^2(x)}{H(x)}; \quad \phi(x) - 1 = C \frac{P_1(x)P_2^2(x)}{H(x)};$$

avec  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  sont des polynômes unitaires de degrés 1 et  $H(x)$  est un polynôme unitaire de degré 2. On utilise la même méthode de calcul que ci-dessus. On obtient explicitement le revêtement :

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{4v(1+u)}{-4v + 4v^2 + 8uv^2 + 4v^2u^2 - 4vu} \frac{(x-1)(x-u)^2}{(x-t_1)(x-t_2)}, \\
\phi(x) - 1 &= \frac{v(1+u)(-1+v+vu)}{-4v + 4v^2 + 8uv^2 + 4v^2u^2 - 4vu} \frac{x(x-b)^2}{(x-t_1)(x-t_2)};
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
b &= -\frac{1 - 6v^2 - 6uv^2 + 8v^3u + 2v + 4v^3u^2 + 1 + 4v^3}{-1 + v + vu}; \\
t_1 &= -\frac{4(-1 + v + vu)^2v^2}{4uv^2 - 4v + 1 + 4v^2}; \\
t_2 &= -\frac{1}{4v(1+u)(-1+v+vu)}.
\end{aligned}$$

Les solutions algébriques de Garnier sont déterminées par des racines de l'équation  $Q(x) = 0$  qui sont paramétrées par la courbe elliptique en variable  $(v, w)$ , avec

$$w^2 = (32v^4 + 32u^2v^4 + 64v^4u + 4v^3u^2 - 40v^3u - 44v^3 + 12uv^2 + 28v^2 - 8v + 1)(4v^3u^2 + 1 - 4uv^2 - 4v^2 + 8v^3u + 4v^3).$$

On obtient des solutions algébriques explicites du système de Garnier :

$$\begin{aligned} q_1(u, v) &= \frac{1 - 4v + 1 + 4v^3u^2 + 8v^3u + 4v^3 + w}{4 - v(1 + u)(4uv^2 - 4v + 1 + 4v^2)}; \\ q_2(u, v) &= \frac{1 - 8v^3u + 4v^3 - 4v + 4v^3u^2 - w + 1}{4 - v(1 + u)(4uv^2 - 4v + 1 + 4v^2)}. \end{aligned}$$

### Revêtements de degré 4

C'est le troisième énoncé de triplet  $(2, 2, \infty)$  si  $k = 1$ , le type de revêtement correspondant à homographie près à gauche de  $\phi$  est  $(2 + 1 + 1; 2 + 2; 2 + 1 + 1)$ . On a explicitement un revêtement définie par

$$\phi(x) = -4 \frac{(x - a)^2 F(x)}{H(x)},$$

et

$$\phi(x) - 1 = \frac{P(x)^2}{H(x)},$$

où

$$\begin{aligned} F(x) &= (8uv^3 + 8v^2u + 2v^2 + 3v)x^2 \\ &\quad + (-u(8uv^3 + 8v^2u + 2v^2 + 3v) - 9 + 2v^2u + 3vu - 30v - 8v^3 - 28v^2)x \\ &\quad - u(-9 + 2v^2u + 3vu - 30v - 8v^3 - 28v^2); \\ H(x) &= (4v^3 + 3v + 8v^2 + 4u^2v^3 - 4v^2u - 8uv^3)x^2 \\ &\quad + (4u^2v^2 - 4vu - 8v^2u + 3 + 8v + 4v^2)x + vu^2 - 3u - 8vu - 4v^2u; \\ P(x) &= (9 + 30v + 56v^2u + 28v^2 - 64u^2v^4 + 80uv^3 + 32v^4u - 20u^2v^2 + 12vu \\ &\quad + 32u^3v^3 + 32u^3v^4 - 88u^2v^3 + 8v^3)x^2 \\ &\quad + (-288u^2v^3 - 108v - 144v^2 + 128u^3v^3 - 27 - 80v^3 + 36u - 16u^4v^4 \\ &\quad + 192vu + 64v^4u + 64v^2u^3 - 16v^4 - 96u^2v^4 + 352v^2u + 256uv^3 + 64u^3v^4 \\ &\quad - 256u^2v^2 - 16v^3u^4 - 60vu^2)x \\ &\quad + 54u - 8v^2u^4 - 488u^2v^2 - 8v^3u^4 + 160uv^3 + 112u^3v^3 + 32u^3v^4 \\ &\quad - 296u^2v^3 - 64u^2v^4 + 32v^4u + 48vu^3 - 72u^2 - 330vu^2 + 128v^2u^3 \\ &\quad + 216vu + 288v^2u; \\ a &= -\frac{1}{2} \frac{2v + 3}{v}. \end{aligned}$$

Le revêtement se normalise et devient unique à constante près par composition à sa droite par l'inverse de transformation homographique  $\varphi^{-1}(x)$  fixant l'infini, envoyant

les racines de  $F(x)$  et  $H(x)$  sur 0, 1 et sur  $t_1$  et  $t_2$  respectivement. L'expression de transformation homographique est explicitement donnée par

$$\varphi(x) = \frac{(-x+u)v(3+8vu+2v+8v^2u)}{(2vu+2v+3)(4v^2u-4v^2+4vu-8v-3)}.$$

Une solution algébrique complète du système de Garnier est donnée par les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} t_1(u, v) &= -\frac{1}{2}(-4u^2v^2+4v^2+8v^2u+3+8v+2vu-w+8u^3v^3-16u^2v^3 \\ &\quad +8uv^3)(3+8vu+2v+8v^2u)/(4u^2v^2-4vu-8v^2u+3+8v \\ &\quad +4v^2)(2vu+2v+3)(4v^2u-4v^2+4vu-8v-3), \\ t_2(u, v) &= \frac{1}{2}(-4u^2v^2+2vu+8v+8v^2u+w+4v^2+3+8u^3v^3-16u^2v^3 \\ &\quad +8uv^3)(3+8vu+2v+8v^2u)/(4u^2v^2-4vu-8v^2u+3+8v \\ &\quad +4v^2)(2vu+2v+3)(4v^2u-4v^2+4vu-8v-3), \end{aligned}$$

avec

$$w^2 = (1+2v)(3+8vu+2v+8v^2u)(4u^2v^2-4vu-8v^2u+3+8v+4v^2).$$

$$\begin{aligned} q_1(u, v) &= \frac{uv(3+8vu+2v+8v^2u)}{(2vu+2v+3)(4v^2u-4v^2+4vu-8v-3)}, \\ q_2(u, v) &= \frac{v(-1+u)(3+8vu+2v+8v^2u)}{(2vu+2v+3)(4v^2u-4v^2+4vu-8v-3)}. \end{aligned}$$

### Revêtements de degré 5

C'est le cas  $k = 2$  au deuxième énoncé de triplet  $(2, 2, \infty)$ , son type de ramification est donné par  $(2+2+1; 2+2+1; 3+1+1)$ . On considère son type de ramification équivalente  $(2+2+1; 3+1+1; 2+2+1)$ . Par transformation homographie de  $\mathbb{P}_x^1$ , on fixe le point  $x = \infty$ ,  $t_1$  et  $t_2$  au dessus de  $z = 1$  à l'ordre respectif 3, 1 et 1 et on choisit les ramifications libres à  $x = q_1$  et à  $x = q_2$ . Par la même transformation homographie, on fixe  $x = 0$  sur 0 et  $x = 1$  sur  $\infty$ . Alors le revêtement s'écrit génériquement

$$\phi(x) = C \frac{x(x^2+a_1x+a_0)^2}{(x-1)(x^2+b_1x+b_0)^2}; \phi(x) - 1 = C \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(x-1)(x^2+b_1x+b_0)^2}$$

où les  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes indéterminées. On peut les déterminer en imposant sur le revêtement certaines conditions : qu'il possède en  $x = \infty$  point critique d'ordre 3

sur  $z = 1$ . On obtient explicitement

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{6} \frac{72a_0 + 8u^2a_0 + 15u + 18 + 5u^2 + 48ua_0}{(u+3)(u+1)}; \\
b_0 &= \frac{1}{24} \frac{(u-3)(8ua_0 - u + 24a_0 + 3)}{(u+3)(u+1)}; \\
b_1 &= -\frac{1}{6} \frac{72a_0 + 8u^2a_0 + 3u + 9 + 2u^2 + 48ua_0}{(u+3)(u+1)}; \\
t_1 &= -\frac{1}{24} \frac{(u-3)^2}{u+3}; \\
t_2 &= \frac{1}{3} \frac{(8ua_0 - u + 24a_0 + 3)^2}{(u+1)(16ua_0 + 48a_0 - 5u + 3)}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression explicite du polynôme  $Q(x)$ , on considère la dérivée logarithmique de l'application  $\phi(x)$ . On a

$$\begin{aligned}
Q(x) &= (486 - 918u^2 - 270u^3 + 6048u^2a_0 + 12960ua_0 + 7776a_0 + 864u^3a_0 - 162u)x^2 \\
&\quad + (-81u - 486 - 6480a_0 - 20736a_0^2 + 96u^3a_0 - 20736ua_0^2 + 48u^4a_0 - 4320ua_0 \\
&\quad - 15u^4 - 6912u^2a_0^2 + 81u^2 + 45u^3 - 864u^2a_0 - 768a_0^2u^3)x \\
&\quad + 108ua_0 + 288u^2a_0^2 + 162a_0 - 48a_0^2u^4 + 1296a_0^2 - 12u^3a_0 - 72u^2a_0 \\
&\quad - 192a_0^2u^3 + 6u^4a_0 + 1728ua_0^2.
\end{aligned}$$

Si on considère l'une des variables de l'équation  $Q(x) = 0$  comme constante soit disant  $u$ , elle définit une courbe algébrique de genre 1 dans les variables  $a_0$  et  $x$ . Par contre si on choisit  $a_0$  comme paramètre le genre de la courbe  $Q(x) = 0$  augmente à 2. On peut dire que l'équation de la courbe algébrique définie par cette équation est hyperelliptique. Sur Maple dans le package Weierstrassform, elle correspond à un modèle de transformation de Weierstrass :

$$\begin{aligned}
w^2 &= 236352873124528128u^6 + 21069929528819712u + 25214395392v \\
&\quad + 315269109209235456u^5 + 264729876480vu^5 + 35668908001198080u^8 \\
&\quad + 2444961919795200 + 112163291136u^{13} + \frac{4096}{3}vu^{16} + 38620758016u^{17} \\
&\quad + \frac{12400328704}{27}u^2 + 146690942976vu - 27291648vu^{11} - 7789519872vu^8 \\
&\quad + 6515417088vu^7 - 2072165368725504u^{11} + 369508801536vu^2 + 528259387392vu^3 \\
&\quad + 85963742208vu^6 - 4452040131084288u^{10} + \frac{1965457473536}{27}u^{18} - 820055040vu^{10} \\
&\quad + 16071674167296u^{14} + 120148354334195712u^7 - v^3 - 406389856665600u^{12} \\
&\quad - 228152311808u^{16} + \frac{84063232}{3}vu^{12} + \frac{216808554496}{9}u^{19} + \frac{275709952}{9}u^{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +82111538423070720u^2 + 191044587734433792u^3 - 3922569216vu^9 \\
& + \frac{10485760}{9}u^{23} + 2050394947584u^{15} + \frac{38245629952}{9}u^{20} + 294645286549979136u^4 \\
& + 889856vu^{14} + \frac{524288}{27}u^{24} + \frac{163840}{3}vu^{15} + 470146913280vu^4 + 919017460334592u^9 \\
& + \frac{22116352}{3}vu^{13}.
\end{aligned}$$

Tous les autres coefficients de l'application  $\phi(x)$  et les racines  $t_i$  seront paramétrés par  $u$  et  $v$  ; avec

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\frac{1}{24} \frac{(u-3)^2}{u+3}; \\
t_2 &= -\frac{1}{192}(640u^{12} + 10944u^{11} + 40512u^{10} - 283328u^9 - 2983872u^8 - 9641088u^7 \\
& - 998784u^6 + 99252864u^5 + 382268160u^4 + 30vu^4 + 736744896u^3 + 156vu^3 \\
& + 288vu^2 + 793758528u^2 + 324vu + 450556992u + 104556096 + 3w \\
& + 162v)^2 / ((u+3)^2(640u^{12} + 19200u^{11} + 263424u^{10} + 2181376u^9 + 11408256u^8 \\
& + 34693632u^7 + 37642752u^6 - 123628032u^5 - 577507968u^4 + 30vu^4 \\
& - 1060957440u^3 + 300vu^3 - 1041921792u^2 + 1296vu^2 - 535797504u + 2484vu \\
& - 113374080 + 1458v + 3w)(u+1)(3v + 172u^8 + 3440u^7 + 24688u^6 + 73872u^5 \\
& + 5256u^4 - 562032u^3 - 1452816u^2 - 1442448u - 504468)).
\end{aligned}$$

Les racines de l'équation  $Q(x) = 0$  sont des solutions algébriques du système de Garnier qui sont explicitement données par :

$$\begin{aligned}
q_1(u, v) &= -\frac{1}{16}(u+1)(u-3)(-2488243608576u - 10206w - 1294704v - 324wu^3 \\
& - 2281247732736u^5 - 563081559552u^6 + 45312vu^6 - 18wu^4 - 9504vu^5 \\
& - 794016vu^4 + 9120vu^7 - 4727808vu^2 + 39245658624u^8 + 13648739328u^9 \\
& + 2663216640u^{10} + 533864448u^{11} - 12957677568u^7 - 5456195624448u^2 \\
& - 6684092338176u^3 - 2874528vu^3 - 2160wu^2 - 485150363136 \\
& - 4989954378240u^4 + 528vu^8 + 9v^2 + 140313088u^{12} + 29529088u^{13} \\
& + 3761664u^{14} + 256000u^{15} + 7168u^{16} - 3895776vu \\
& - 7452wu) / ((u+3)(3v + 172u^8 + 3440u^7 + 24688u^6 + 73872u^5 + 5256u^4 \\
& - 562032u^3 - 1452816u^2 - 1442448u - 504468)(3v + 64u^8 + 1280u^7 \\
& + 8704u^6 + 20736u^5 - 5760u^4 - 76032u^3 - 41472u^2 + 62208u + 46656)); \\
q_2(u, v) &= -\frac{1}{288}(-180700552902279168u - 22674816w - 137953580544v \\
& + 27247104wu^5 + 933120v^2u^2 + 1329696v^2u + 55427328wu^3 - 178848v^2u^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2848095077547442176u^5 - 2173245865759899648u^6 + 7177728vu^{12} \\
& -590829562368vu^6 + 197874941952u^{19} + 27114700800u^{20} + 3044737024u^{21} \\
& +258834432u^{22} + 5202432vu^{14} + 103856256wu^4 - 1606203343872vu^5 \\
& -2738765053440vu^4 - 110129061888vu^7 - 2078010837504vu^2 \\
& -333286621037199360u^8 + 1969593935855616u^9 + 53070914360770560u^{10} \\
& +24894866964086784u^{11} - 2916wuv + 2680902144vu^{10} \\
& -1123513289777479680u^7 \\
& -711499434764894208u^2 - 1675269100044288000u^3 - 3015690061824vu^3 \\
& +13762560u^{23} + 327680u^{24} + 162u^4wv + 10886814720vu^9 - 1458wv - 3106944wu^8 \\
& -22768128wu^7 - 60466176wu^2 + 76032wu^{11} + 1444608wu^9 - 36864v^2u^6 \\
& +580608wu^{10} + 9w^2 - 1296wu^2v + 14582784vu^{13} + 224778240vu^{11} \\
& -2619736731336867840u^4 + 8397706752vu^8 + 524880v^2 + 675840vu^{15} + 3456u^{12}w \\
& -20781706133274624 + 4651374915551232u^{12} - 527551709184000u^{13} \\
& -532571809185792u^{14} - 131572636581888u^{15} - 10146795651072u^{16} \\
& +2788474945536u^{17} + 1066677862400u^{18} - 813572398080vu - 230688v^2u^5 \\
& -500256v^2u^4 + 720u^8v^2 + 30720vu^{16} + 324wu^3v + 1440v^2u^7 - 75582720wu \\
& -32348160wu^6)/((u+1)(u+3)^2(3v+64u^8+1280u^7+8704u^6+20736u^5-5760u^4 \\
& -76032u^3-41472u^2+62208u+46656)(640u^{12}+19200u^{11}+263424u^{10} \\
& +2181376u^9+11408256u^8+34693632u^7+37642752u^6-123628032u^5 \\
& -577507968u^4+30vu^4-1060957440u^3+300vu^3-1041921792u^2+1296vu^2 \\
& -535797504u+2484vu-113374080+1458v+3w)).
\end{aligned}$$

## Revêtements de degré 6

Ce sont des revêtements de types ramifications  $(4+2; 2+2+2; 2+1+1+1+1)$  et  $(2+2+1+1; 2+2+2; 4+1+1)$  qui correspondent  $k=1$  et  $k=2$  respectivement au premier et au troisième énoncés de triplet  $(2, 2, \infty)$ . On commence par le premier type de revêtement  $(4+2; 2+2+2; 2+1+1+1+1)$ . On fixe, par la transformation homographique  $\varphi$ ,  $x = \infty$  sur  $z = \infty$  à l'ordre 2 et elle envoie les autres points non apparents sur 0, 1,  $t_1$  et  $t_2$ , les deux points critiques simples libres sont l'image de  $x = 0, 1$  par cette même homographie. La transformation  $\varphi$  est une translation, puisqu'elle ne fixe qu'un seul point. L'application revêtement s'écrit génériquement sous la forme

$$\phi(x) = C \frac{F_1^4(x)F_2^2(x)}{H(x)}; \phi(x) - 1 = C \frac{P^2(x)}{H(x)};$$

avec

$$F_1(x) = x - a_0;$$

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= x - a_1; \\
P(x) &= x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0; \\
H(x) &= x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0,
\end{aligned}$$

sont des polynômes unitaires de degrés respectifs 2 et 3, la constante indéterminée

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x^2}.$$

Pour déterminer les coefficients des polynômes ci-dessus, on considère des dérivées logarithmiques de  $\phi(x)$  et  $\phi(x) - 1$  qui sont données par des expressions suivantes

$$C_1x(x-1)P(x) = (2F_1(x)F_2'(x) + 4F_2(x)F_1'(x))H(x) - H'(x)F_1(x)F_2(x); \quad (4.8)$$

$$C_2x(x-1)F_1^3(x)F_2(x) = 2P'(x)H(x) - H'(x)P(x). \quad (4.9)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont égales à l'ordre de point  $x = \infty$ . Les deux équations (4.8) et (4.9) donnent des relations entre les coefficients des polynômes, qui forment un système d'équations. On a plusieurs méthodes de résoudre d'un tel système d'équations, mais ici on va utiliser la méthode d'élimination de Groebner. Pour cela, on fait une base Groebner avec les relations obtenues avec l'ordre lexicographique  $(b_2, b_1, b_0, c_3, c_2, c_1, c_0, a_0, a_1)$  puis on résout les équations obtenues. Tous ces coefficients s'expriment en fonction des coefficients  $a_0$  et  $c_2$ . On a :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= x - a_0, \\
F_2(x) &= (2a_0 - 1)x + a_0(a_0 - 2), \\
P(x) &= (3 - 12a_0 + 12a_0^2)x^3 + (9a_0 - 18a_0^2)x^2 \\
&\quad + (6c_2 - 24a_0c_2 + 24a_0^2c_2 + 9a_0^4 + 12a_0 - 30a_0^2 - 6a_0^3)x - 6a_0^3 - 8a_0^4 + 3a_0^5 \\
&\quad - 8a_0 + 24a_0^2 - 4c_2 + 18a_0c_2 - 24a_0^2c_2 + 8a_0^3c_2, \\
H(x) &= (-9 + 18a_0)x^4 + ((-2 + a_0)(-3 + 6a_0) - 27a_0)x^3 \\
&\quad + (-9a_0(-2 + a_0) - 9c_2 + 18a_0c_2 - 18a_0 + 9a_0^2)x^2 \\
&\quad + ((-2 + a_0)(-3c_2 + 6a_0c_2 - 6a_0 + 3a_0^2) + 12a_0 - 12a_0^2 + 3a_0^3 + 6c_2 \\
&\quad - 15a_0c_2 + 6a_0^2c_2)x + (-2 + a_0)(4a_0 - 4a_0^2 + a_0^3 + 2c_2 - 5a_0c_2 + 2a_0^2c_2).
\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la résolution de l'équation  $H(x) = 0$ , ses racines donnent les points critiques non apparents de l'application  $\phi(x)$ . Elles seront normalisées par la transformation  $\varphi$  à  $x = 0, 1, t_1, t_2$ . On obtient après la résolution de l'équation  $H(x) = 0$  une racine

$$x_0 = \frac{2 - a_0}{3},$$

le cofacteur de  $x - x_0$  est une équation cubique en  $x$ . L'équation cubique dans les variables  $(x, c_2)$  est une courbe algébrique de genre 0 alors on peut la paramétrer pour obtenir la deuxième racine  $x_1 = u$  de l'équation  $H(x) = 0$ . On se trouve avec l'équation du second ordre en  $x$  où il est facile de voir qu'elle est une courbe algébrique dans la variable  $(a_0, x)$

de genre 1. On peut encore utiliser le package de Weierstrassform transformation sur Maple pour trouver sa transformée Weierstrass correspondante ; on a

$$w^2 = (v - 6u^3 - 6u + 3 + 3u^4)(v - 6 + 12u - 6u^3 + 3u^4)(6u^4 - 12u^3 + 6u - 3 - v).$$

La transformation linéaire fractionnelle  $\varphi$  fixe  $\infty$ , envoie  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sur 0, 1,  $t_1$  et  $t_2$  respectivement. L'image de 0 et 1 par  $\varphi$  est respectivement les deux points critiques simples libres  $q_1$  et  $q_2$ . Elle est explicitement définie par  $\varphi(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$  avec

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & ((9 + 9vu^2 + 6vu^4 + 42vu - 90u^7 - 30vu^3 - 261u^2 - 144u^3 + v^2 + 6v + 126u \\ & - 1224u^5 + 495u^6 + 9u^8 + 1170u^4)x \\ & - 54u + 27u^2 - 3wu^2 - 27u^8 - 18vu + 36vu^3 - 27vu^2 - 783u^4 - 9vu^4 - 459u^6 \\ & + 810u^5 + 6wu + 270u^3 + 162u^7)/(u(6w - 45 - 3wu + 153u - 12v + 9u^2 + 9u^8 \\ & + v^2 + 15vu - 39vu^3 + 45vu^2 + 1980u^4 + 6vu^4 + 657u^6 - 1683u^5 \\ & - 927u^3 - 117u^7)). \end{aligned}$$

La composition de l'application  $\phi(x)$  à droite avec l'inverse de transformation homographie  $\varphi^{-1}(x)$  se normalise à une unique application  $\tilde{\phi}(x)$  à constante près qui s'écrit sous la forme

$$\tilde{\phi}(x) = C \frac{\tilde{F}_1^4(x)\tilde{F}_2^2(x)}{x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)}; \tilde{\phi}(x) - 1 = C \frac{\tilde{P}^2(x)}{x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)};$$

où

$$\begin{aligned} t_1 = & 18(u-2)(6u^4 - 12u^3 + 6u - 3 - v)(45u^8 - 234u^7 + 423u^6 - 396u^5 + 12vu^4 \\ & + 396u^4 - 396u^3 - 42vu^3 + 6wu^2 + 207u^2 + 45vu^2 - 12wu - 18u - 6vu - 9 \\ & - v^2 - 6v)/((v - 6u^3 - 6u + 3 + 3u^4)(v - 24u^3 - 24u + 3 + 45u^2 + 3u^4)(6w - 45 \\ & - 3wu + 153u - 12v + 9u^2 + 9u^8 + v^2 + 15vu - 39vu^3 + 45vu^2 + 1980u^4 + 6vu^4 \\ & + 657u^6 - 1683u^5 - 927u^3 - 117u^7)); \\ t_2 = & -(u-2)(729 + 4374wu^2 + 1148661u^{11}v^2 + 1458v - 8380584u^{16}v - 196506wu^5v \\ & + 6561u - 32562u^3v^2 + 149929785u^{14} - 135u^8v^4 - 17496wu^{12}v + 285768wu^6v \\ & + 440073u^6v^2 + 680886u^{13}v^2 - 232794u^{14}v^2 + 3651561u^{21} - 618921u^{22} \\ & + 1620wuv - 36450wu^3v - 302292wu^7v - 40338u^2v^2 + 1296wu^2v^2 + 97848wu^4v \\ & - 6642wu^3v^2 + 810wuv^2 + 42056010u^{19} - 14900031u^{20} + 169215480u^{12} \\ & - 125124831u^{11} + 729u^7v^4 - 12474u^8v^3 + 212868u^8v^2 + 81v^4u^5 + 27v^5u \\ & + 12999528u^{10}v - 1174176u^{12}v^2 + 44226u^{15}v^2 - 3645u^{16}v^2 + 9072u^4wv^2 \\ & - 14644152u^{11}v + 18v^5 - 9v^5u^2 - 9v^5u^3 - 204849u^7v^2 + 4828167u^6v + 2430v^3u \\ & - 644679u^5v^2 + 56376w^2u^8 - 20412w^2u^9 + 9396v^3u^4 + 374706u^4v^2 \\ & + 2848203u^{17}v - 645165u^{18}v + 16598601u^{15}v - 9234v^3u^2 + 7290uv^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +89667u^{19}v - 37341u^7v^3 - 233037wu^{13} - 1458wu^{14} + 45738v^3u^9 + 5103wu^{17} \\
& - 5832u^{20}v - 81v^4u^4 + 108wu^2v^3 + 21222wu^{11}v + 2845287u^4 - 324wu^{10}v^2 \\
& + 2106wu^9v^2 + 9558v^3u^{11} - 1080v^3u^{12} + 4266v^3u^3 + 180wuv^3 - 648wu^{14}v \\
& - 486wu^{18} - 4536wu^8v^2 - 18468w^2u^5 - 206307u^3 + 2106wv^2u^7 + 324wu^5v^3 \\
& - 497907u^{10}v^2 + 67797u^{23} + 41310wu^{15} - 1526526wu^{11} - 21384wu^{16} - 72wu^6v^3 \\
& - 126wu^3v^3 + 1808649u^7v - 6wu^2v^4 - 360wu^4v^3 - 95013u^9v^2 + 62208w^2u^6 \\
& + 3888w^2u^{10} - 324w^2u^{11} + 15wuv^4 - 83592w^2u^7 + 405uv^4 - 18873v^3u^5 + 1269v^4u^3 \\
& - 31914v^3u^{10} + 13907133u^{13}v + 232308u^8wv - 3645u^24 + 432w^2u^2v + 216w^2u^3v \\
& - 1076004u^7 + 4212wu^2v + 39609u^6v^3 - 3132w^2u^5v + 18144wu^{10}v + 135v^4 \\
& + 1728w^2u^4v + 5508wu^{13}v - 837u^2v^4 + 1512w^2u^6v - 36w^2u^3v^2 - 216w^2u^7v \\
& + 782460u^{12}w + v^6 - 28927449u^8 + 72w^2u^2v^2 - 6160050u^8v - 5122683u^5v \\
& + 39503781u^{10} + 90253116u^{17} - 21065913u^{14}v - 79367688u^{18} - 1053u^6v^4 - 59049u^2 \\
& + 27196803u^9 + 1169802wu^6 + 2434860u^{12}v + 2107296wu^{10} - 52974wu^3 \\
& + 15224436u^6 - 10082070u^5 - 2366820wu^9 - 1889082wu^7 + 202176wu^4 \\
& - 554769wu^5 - 115182wu^9v + 972w^2u^3 - 9801wu^5v^2 + 2329884wu^8 + 648w^2u^2 \\
& - 33926931u^{16} - 175609539u^{13} - 70124697u^{15} - 1306368u^9v + 1215wu + 5670wu^6v^2 \\
& + 540v^3 + 1215v^2 + 10935vu - 79461vu^2 - 169857vu^3 + 1985796vu^4)/((v - 6u^3 + 3 \\
& + 3u^4 - 6u)(v - 24u^3 + 45u^2 + 3 + 3u^4 - 24u)(v^2 - 12vu^4 + 42vu^3 + 6v + 6vu \\
& - 45vu^2 - 396u^4 + 18u - 423u^6 + 12wu + 396u^3 - 45u^8 - 6wu^2 + 396u^5 - 207u^2 \\
& + 234u^7 + 9)u(6w - 45 - 12v - 3wu + 153u + 1980u^4 - 927u^3 - 117u^7 + 9u^8 + 9u^2 \\
& + 657u^6 - 1683u^5 + v^2 + 15vu + 45vu^2 - 39vu^3 + 6vu^4)).
\end{aligned}$$

On a explicitement une solution algébrique complète du système de Garnier

$$\begin{aligned}
q_1(u, v) &= -3(u - 2)(9u^6 - 36u^5 + 81u^4 - 108u^3 + 45u^2 + 3vu^2 - 6vu - 9 \\
&+ w - 3v)/(6w - 45 - 3wu + 153u - 12v + 9u^2 + 9u^8 + v^2 + 15vu - 39vu^3 \\
&+ 45vu^2 + 1980u^4 + 6vu^4 + 657u^6 - 1683u^5 - 927u^3 - 117u^7); \\
q_2(u, v) &= -(-9 - 72u - 6v + 234u^2 + 3wu^2 + 18u^8 - v^2 - 24vu - 6vu^3 + 18vu^2 \\
&- 387u^4 + 3vu^4 - 36u^6 + 414u^5 - 6wu - 126u^3 - 72u^7)/(u(6w - 45 - 3wu \\
&+ 153u - 12v + 9u^2 + 9u^8 + v^2 + 15vu - 39vu^3 + 45vu^2 + 1980u^4 + 6vu^4 \\
&+ 657u^6 - 1683u^5 - 927u^3 - 117u^7)).
\end{aligned}$$

Pour le type de revêtements  $(2 + 2 + 1 + 1; 2 + 2 + 2; 4 + 1 + 1)$ , par transformation fractionnelle linéaire  $\varphi(x)$  on fixe  $x = \infty$  à l'ordre 4, et on choisit les deux points critiques libres par la même homographie à  $x = 0$  et à  $x = 1$ . On obtient explicitement un revêtement normalisé unique à constante près après la composition à droite avec

l'inverse de transformations  $\varphi^{-1}(x)$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{8} \frac{v(u+1)(256uv^2 + 256v^2 + 32v + 1)(8uv + 8v + 1)}{(uv + 8v + 1)^2} \frac{x(x-1)F(x)^2}{(x-t_1)(x-t_2)}; \\ \phi(x) - 1 &= \frac{1}{8} \frac{v(u+1)(256uv^2 + 256v^2 + 32v + 1)(8uv + 8v + 1)}{(uv + 8v + 1)^2} \frac{P^2(x)}{(x-t_1)(x-t_2)};\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}F(x) &= (128uv + 128v + 16)x^2 \\ &\quad + (-12 + 2048uv^2 + 16384v^3u + 8192v^3 + 2048v^2 + 8192v^3u^2 + 64v - 64uv)x \\ &\quad - 768uv^2 - 768v^2 - 2048v^3u^2 - 4096v^3u - 2048v^3 - 64v + 1; \\ P(x) &= (128uv + 128v + 16)x^3 \\ &\quad + (8192v^3 + 16384v^3u - 20 + 2048uv^2 + 2048v^2 - 128uv + 8192v^3u^2)x^2 \\ &\quad + (-1792uv^2 - 6144v^3 - 1792v^2 - 6144v^3u^2 - 12288v^3u + 5 + 16uv - 112v)x \\ &\quad + 128uv^2 + 128v^2 + 16v;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t_1 &= -\frac{256(8uv + 8v + 1)^2v^2}{256uv^2 + 256v^2 + 32v + 1}; \\ t_2 &= -\frac{1}{32v(u+1)(8uv + 8v + 1)}.\end{aligned}$$

Les solutions algébriques du système de Garnier sont définies sur la courbe hyperelliptique  $(v, w)$

$$\begin{aligned}w^2 &= (2048v^3u^2 - 1 + 256uv^2 + 256v^2 + 4096v^3u + 2048v^3)(-25 - 1760v \\ &\quad - 1249280v^3u + 11676942336v^7 + 77309411328v^9 - 58368v^2 + 26738688v^5 \\ &\quad + 1262485504v^6 + 48318382080v^8 - 1026048v^3 - 19464192v^4u \\ &\quad + 1159641169920v^9u^2 - 13631488v^5u + 1546188226560v^9u^3 - 247463936v^6u^4 \\ &\quad + 3045064704v^6u^2 + 520093696v^6u^3 + 77309411328v^9u^6 + 1159641169920v^9u^4 \\ &\quad + 463856467968v^9u^5 + 10066329600v^7u^4 + 68451041280v^7u^2 - 458752u^3v^4 \\ &\quad + 44291850240v^7u^3 + 524288u^4v^5 + 463856467968v^9u + 46305116160v^7u \\ &\quad - 223232v^3u^2 - 106954752v^5u^2 - 66060288v^5u^3 - 11599872u^2v^4 - 33024uv^2 \\ &\quad + 3539992576v^6u + 48318382080v^8u^5 - 402653184v^7u^5 + 241591910400v^8u \\ &\quad - 8323072v^4 + 241591910400v^8u^4 + 483183820800v^8u^3 + 483183820800v^8u^2 \\ &\quad - 160uv - 256u^2v^2).\end{aligned}$$

D'après le théorème (21), on a une solution algébrique explicite du système de Garnier :

$$\begin{aligned}
q_1(u, v) = & -\frac{1}{256}(5 - 4096v^3u^2 + 20480v^3 + 16384v^3u + 491520u^2v^4 + 1081344v^4u \\
& + 557056v^4 - 32768u^3v^4 + 12582912v^6u^4 + 50331648v^6u + 50331648v^6u^3 \\
& + 75497472v^6u^2 + 12582912v^6 + 14155776v^5u + 4718592v^5u^3 \\
& + 14155776v^5u^2 + 4718592v^5 + 1280uv^2 + 1280v^2 + 176v \\
& + 16uv - w)/(v(u+1)(256uv^2 + 256v^2 + 32v + 1)(8uv + 8v + 1)); \\
q_2(u, t) = & -\frac{1}{256}(176v + 4718592v^5 + 12582912v^6 + 20480v^3 + 1081344v^4u \\
& + 14155776v^5u + 12582912v^6u^4 + 75497472v^6u^2 + w - 32768u^3v^4 \\
& - 4096v^3u^2 + 14155776v^5u^2 + 16384v^3u + 1280v^2 + 1280uv^2 + 50331648v^6u \\
& + 557056v^4 + 50331648v^6u^3 + 491520u^2v^4 + 16uv + 5 \\
& + 4718592v^5u^3)/(v(u+1)(256uv^2 + 256v^2 + 32v + 1)(8uv + 8v + 1)).
\end{aligned}$$

### Revêtements de degré 7

Son type de ramification est de la forme  $(2+2+2+1; 2+2+2+1; 5+1+1)$ , correspond  $k = 3$  au deuxième énoncé de triplet  $(2, 2, \infty)$  dans la preuve de proposition (11). On considère génériquement son revêtement sous la forme :

$$\phi(x) = C \frac{(x-a)F^2(x)}{H(x)}; \quad \phi(x) - 1 = C \frac{(x-b)P^2(x)}{H(x)}$$

avec

$$\begin{aligned}
F(x) &= x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; \\
P(x) &= x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0; \\
H(x) &= x^2 + c_1x + c_0.
\end{aligned}$$

Si on fait la même normalisation comme dans les cas précédents, il devient très difficile de résoudre les systèmes d'équations obtenues par les relations entre les coefficients. La machine prend au minimum trois heures de temps pour chercher sa base de Greobner, à la sortie il donne une base très compliquée à résoudre. Pour y éviter, on change la façon de normalisation de l'application revêtement. Par homographie, on fixe trois points parmi les sept points par exemple à 0, 1, et  $\infty$  (i.e on ne remplace pas ces trois points par les inconnues comme on les faisait) ; la transformation homographique se réduit à l'application identité. On fixe, par cette normalisation,  $a$  à 1,  $b$  à 0 et  $\infty$  sur  $\infty$  à l'ordre 5 ;  $t_1$  et  $t_2$  sont exactement les racines de  $H(x) = 0$ . Les deux points critiques libres seront les racines de  $Q(x) = x^2 + q_1x + q_0$ . On calcule encore la dérivée logarithmique de  $\phi(x)$  et  $\phi(x) - 1$  :

$$5(x^2 + q_1x + q_0)P(x) = (F(x) + 2(x-1)F'(x))H(x) - (x-1)F(x)H'(x); \quad (4.10)$$

$$5(x^2 + q_1x + q_0)F(x) = (P(x) + 2xP'(x))H(x) - xP(x)H'(x). \quad (4.11)$$

Sur Maple, on fait une base de Groebner avec des relations obtenues des deux équations (4.10) et (4.11) avec l'ordre lexicographique  $(q_1, q_0, c_1, c_0, b_0, b_1, b_2, a_0, a_2, a_1)$ . On obtient deux solutions après la résolution de cette base. On considère une solution qui définit l'expression explicite du revêtement souhaité :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= -\frac{1}{1024} \frac{(4v+5)^2(4u+3+4v)(4u-3-4v)}{(3+4v)^2} \frac{(x-1)F(x)}{(x-t_1)(x-t_2)}; \\ \phi(x) - 1 &= -\frac{1}{1024} \frac{(4v+5)^2(4u+3+4v)(4u-3-4v)}{(3+4v)^2} \frac{xP^2(x)}{(x-t_1)(x-t_2)}; \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} F(x) &= (6144v + 4096v^2 + 2304)x^3 + (6144v^2 + 2304v + 4096v^3)x^2 \\ &\quad + (1024v^3 - 2560u^2v - 1600u^2 - 896v^2 + 1024v^4 - 1024u^2v^2 - 1344v - 396)x \\ &\quad - 81 - 432v + 256u^2v^2 + 640u^2v + 400u^2 - 864v^2 - 256v^4 - 768v^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (6144v + 4096v^2 + 2304)x^3 + (-1152 + 4096v^3 + 4096v^2 - 768v)x^2 \\ &\quad + (1024v^4 - 1024v^3 - 1600u^2 - 684 - 4480v^2 - 1024u^2v^2 - 2560u^2v - 3264v)x \\ &\quad - 27 - 432v + 768u^2v^2 + 1920u^2v + 1200u^2 - 1440v^2 - 768v^4 - 1792v^3; \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{1}{8} \frac{(-16v^2 + 16uv - 24v + 20u - 9)^2}{(4v+5)(4u-3-4v)(3+4v)};$$

$$t_2 = -\frac{1}{8} \frac{(16v^2 + 24v + 16uv + 20u + 9)^2}{(3+4v)(4v+5)(4u+3+4v)}.$$

On a une solution algébrique complète explicite du système de Garnier sur la courbe hyperelliptique avec monodromie formelle  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$  :

$$\begin{aligned} q_1(u, v) &= -\frac{1}{40}(-4096v^5 - 14336v^4 - 19968v^3 + 4096u^2v^3 + 8192u^2v^2 - 13824v^2 \\ &\quad - 4752v + 3840u^2v - w - 648)/((4v+5)(3+4v)(4u+3+4v)(4u-3-4v)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(u, v) &= -\frac{1}{40}(-4096v^5 - 14336v^4 - 19968v^3 + 4096u^2v^3 + 8192u^2v^2 - 13824v^2 \\ &\quad - 4752v + 3840u^2v + w - 648)/((4v+5)(3+4v)(4u+3+4v)(4u-3-4v)); \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} w^2 &= (256u^2v^2 + 640u^2v + 400u^2 - 189 - 864v - 1440v^2 - 1024v^3 \\ &\quad - 256v^4)(61440u^4v^2 + 153600u^4v + 96000u^4 - 57344u^2v^4 - 229376u^2v^3 \\ &\quad - 301056u^2v^2 - 161280u^2v - 30240u^2 - 4096v^6 - 22528v^5 - 49920v^4 - 57600v^3 \\ &\quad - 36720v^2 - 12312v - 1701). \end{aligned}$$

### Revêtements de degré 8

Il est de type  $(2 + 2 + 2 + 1 + 1; 2 + 2 + 2 + 2; 6 + 1 + 1)$ , on utilise le même raisonnement que le cas précédent. Après on obtient explicitement le revêtement

$$\phi(x) = \frac{1}{64} \frac{(3+2v)^2(v+1+u)(v+1-u)}{(1+v)^2} \frac{x(x-1)F^2(x)}{(x-t_1)(x-t_2)};$$

$$\phi(x) - 1 = \frac{1}{1024} \frac{(3+2v)^2(v+1+u)(v+1-u)}{(1+v)^2} \frac{P^2(x)}{(x-t_1)(x-t_2)};$$

où

$$\begin{aligned} F(x) = & (32v^2 + 64v + 32)x^3 + (32v^3 + 64v^2 + 32v)x^2 \\ & + (-18u^2 - 24u^2v - 18v^2 + 8v^3 + 8v^4 - 8u^2v^2 - 10 - 28v)x \\ & + 12u^2v - 2 - 10v + 4u^2v^2 + 9u^2 - 18v^2 - 14v^3 - 4v^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) = & (128v^2 + 256v + 128)x^4 + (128v^3 + 192v^2 - 64)x^3 \\ & + (-208v - 56 - 32u^2v^2 + 32v^4 - 216v^2 - 72u^2 - 32v^3 - 96u^2v)x^2 \\ & + (-32v^4 - 88v^3 + 4 + 96u^2v - 16v + 32u^2v^2 - 76v^2 + 72u^2)x \\ & + 4 + 16v - 4u^2v^2 - 12u^2v + 24v^2 + 16v^3 + 4v^4 - 9u^2; \end{aligned}$$

$$t_1(u, v) = -\frac{1}{4} \frac{(2v^2 - 2uv + 4v + 2 - 3u)^2}{(3+2v)(v+1-u)(1+v)};$$

$$t_2(u, v) = -\frac{1}{4} \frac{(2v^2 + 2uv + 4v + 2 + 3u)^2}{(1+v)(3+2v)(v+1+u)}.$$

On a explicitement une solution algébrique de Garnier avec valeur propre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} q_1(u, v) = & -\frac{1}{24}(20v^5 + 96v^4 + 184v^3 - 20u^2v^3 - 56u^2v^2 + 176v^2 + 84v - 45u^2v + 16 \\ & - 9u^2 + w)/((3+2v)(1+v)(v+1+u)(v+1-u)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(u, v) = & -\frac{1}{24}(20v^5 + 96v^4 - 9u^2 + 184v^3 - 20u^2v^3 - w + 176v^2 - 56u^2v^2 + 84v \\ & - 45u^2v + 16)/((3+2v)(1+v)(v+1+u)(v+1-u)); \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w^2 = & (-9u^2 - 12u^2v - 4u^2v^2 + 8 + 28v + 36v^2 + 20v^3 + 4v^4)(4v^6 + 28v^5 + 92u^2v^4 \\ & + 80v^4 + 460u^2v^3 + 120v^3 + 100v^2 + 803u^2v^2 - 96u^4v^2 - 288u^4v + 44v \\ & + 594u^2v + 159u^2 + 8 - 216u^4). \end{aligned}$$

## Revêtements de degré 9

On a enfin le revêtement de type de ramification  $(2+2+2+2+1; 2+2+2+2+1; 7+1+1)$ . Pour faciliter les calculs de ce type de revêtement, on fixe par homographie  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $x = \infty$ . Les trois points 0, 1 et  $\infty$  se situent respectivement au dessus de  $z = 0$ ,  $z = 1$  et  $z = \infty$ ,  $t_1$  et  $t_2$  seront les racines de l'équation du second ordre  $H(x) = 0$ . Les deux autres points libres ne seront pas normalisés à un point fixé par cette transformation homographique, ils sont exactement des racines de l'équation  $Q(x) = 0$ . On obtient, après le calcul, l'expression explicite de revêtements :

$$\phi(x) = \frac{1}{6400} \frac{(7+64v)(2240uv+1050u+5120v^2+91+1392v)}{(56u+7+64v)(28u+7+64v)} \frac{x F^2(x)}{(x-t_1)(x-t_1)};$$

$$\phi(x) - 1 = \frac{1}{25600} \frac{(7+64v)(2240uv+1050u+5120v^2+91+1392v)}{(56u+7+64v)(28u+7+64v)} \frac{(x-1)P^2(x)}{(x-t_1)(x-t_2)};$$

avec

$$\begin{aligned} F(x) = & (548800 + 6585600u + 17561600u^2 + 60211200uv + 10035200v \\ & + 45875200v^2)x^4 \\ & + (104857600v^3 - 838880 - 82432000uv - 10113600u - 30105600u^2 \\ & + 20070400u^2v - 14085120v + 91750400uv^2 - 47185920v^2)x^3 \\ & + (-144506880uv^2 + 18063360uv + 304584 + 3704400u + 13171200u^2 \\ & + 3813376v - 35123200u^2v - 146800640v^3 - 6651904v^2)x^2 \\ & + (45875200v^3 + 6585600uv + 17561600u^2v + 548800v \\ & + 60211200uv^2 + 10035200v^2)x \\ & - 1715 - 25725u - 31360v - 784000uv - 2195200u^2v - 143360v^2 \\ & - 5017600uv^2 - 411600u^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) = & (1097600 + 120422400uv + 13171200u + 35123200u^2 + 20070400v \\ & + 91750400v^2)x^4 \\ & + (-18135040v - 1128960 - 42649600u^2 - 48496640v^2 - 104652800uv \\ & + 40140800u^2v + 209715200v^3 + 183500800uv^2 - 13641600u)x^3 \\ & + (-50176000u^2v + 1068032v - 188743680v^3 + 181888 - 197263360uv^2 \\ & - 1146880uv - 26083328v^2 + 2234400u + 9408000u^2)x^2 \\ & + (619136v + 1568000u^2 + 44728320uv^2 + 18424 + 23592960v^3 + 235200u \\ & + 15052800u^2v + 7042560uv + 6701056v^2)x \\ & + 833 - 156800u^2 + 30912v - 26880uv + 7350u + 1310720v^3 + 356352v^2 \\ & - 627200u^2v - 860160uv^2; \end{aligned}$$

$$t_1(u, v) = -\frac{1}{35} \frac{(70u - 7 - 64v)^2}{(28u + 7 + 64v)(7 + 64v)};$$

$$t_2(u, v) = -\frac{1}{560} \frac{(8960uv + 2240u + 119 + 3328v + 20480v^2)^2}{(2240uv + 1050u + 5120v^2 + 91 + 1392v)(56u + 7 + 64v)}.$$

Une solution algébrique du système de Granier est explicitement donnée par  $t_1(u, t)$ ,  $t_1(u, t)$ ,  $q_1(u, t)$  et  $q_2(u, t)$  avec monodromie  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$  :

$$\begin{aligned} q_1(u, v) &= -\frac{1}{1960} (451388 + 133403934720u^2v^2 + 325567119360uv^3 + 12533220u - w \\ &\quad + 43014944v + 1479750451200u^2v^4 + 19668992000u^4v + 215796940800u^3v^3 \\ &\quad + 1702887424000v^4u + 763510128640v^3u^2 + 162971648000u^3v^2 \\ &\quad + 33156300800u^3v + 3382286745600uv^5 + 1119771520uv + 9525411840u^2v \\ &\quad + 9219840000u^4 + 233185120u^2 + 1959216000u^3 + 1312649379840v^5 \\ &\quad + 28161867776v^3 + 2576980377600v^6 + 269156876288v^4 + 1564588032v^2 \\ &\quad + 28853207040uv^2)/((7 + 64v)(2240uv + 1050u + 5120v^2 + 91 \\ &\quad + 1392v)(56u + 7 + 64v)(28u + 7 + 64v)); \\ q_2(u, t) &= -\frac{1}{1960} (451388 + 133403934720u^2v^2 + 325567119360uv^3 + 12533220u + w \\ &\quad + 43014944v + 1479750451200u^2v^4 + 19668992000u^4v + 215796940800u^3v^3 \\ &\quad + 1702887424000v^4u + 763510128640v^3u^2 + 162971648000u^3v^2 \\ &\quad + 33156300800u^3v + 3382286745600uv^5 + 1119771520uv + 9525411840u^2v \\ &\quad + 9219840000u^4 + 233185120u^2 + 1959216000u^3 + 1312649379840v^5 \\ &\quad + 28161867776v^3 + 2576980377600v^6 + 269156876288v^4 + 1564588032v^2 \\ &\quad + 28853207040uv^2)/((7 + 64v)(2240uv + 1050u + 5120v^2 + 91 \\ &\quad + 1392v)(56u + 7 + 64v)(28u + 7 + 64v)); \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w^2 &= 8(39200u^2 - 14700u - 1323 - 197120uv - 39872v - 573440uv^2 - 397312v^2 \\ &\quad - 1310720v^3)(-255180681 + 1233639178240000u^6v^2 + 11565367296000000u^6v \\ &\quad + 1254739089408000u^5v + 4582639108096000u^5v^2 + 123363917824000u^5v^3 \\ &\quad - 303739367823360u^2v^2 - 468608676659200uv^3 - 9407802285u \\ &\quad - 19127979472v - 49342348672368640u^2v^4 + 41620693452800u^4v \\ &\quad - 17645419128422400u^3v^3 - 617877780889600u^4v^2 - 6448816691609600v^4u \\ &\quad - 5008268452167680v^3u^2 - 1470871808000000u^3v^2 - 64793324534400u^3v \\ &\quad - 57717097936977920uv^5 + 84029621760000u^5 + 271063296000000u^6 \\ &\quad - 116012435374080000u^4v^5 - 656267634960uv - 10315655247520u^2v \\ &\quad - 10151088095232000u^5v^4 + 3216617779200u^4 - 153719006910u^2 \\ &\quad - 1191302009100u^3 - 530342561710080000v^6u^3 \\ &\quad - 1212211569623040000v^7u^2 - 1385384650997760000v^8u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -116601129428582400v^4u^3 - 287879333979095040v^5u^2 \\
& -2979013173706752v^5 - 141318167933747200v^7 - 453218692969267200v^8 \\
& -14948110786560v^3 - 25436155684061184v^6 - 245353286205440v^4 \\
& -665732376960v^2 - 633318697598976000v^9 - 22272029427200uv^2 \\
& -13290196277657600u^4v^3 - 73216736991641600u^4v^4 \\
& -322291640062443520v^6u - 396559967584256000v^5u^3 \\
& -1017488060343910400v^7u - 914504193513881600v^6u^2).
\end{aligned}$$





# Bibliography

- [1] M. F. Atiyah, Complex fibre bundles and ruled surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), p. 181 – 207.
- [2] G. V. Belyi, Galois extensions of a maximal cyclotomic field, (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), n° . 2, p. 267 – 276, English translation in *Math. USSR Izv.* **14** (1980), p. 247 – 256.
- [3] P. Boalch, From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo, *Proc. London Math. Soc.* (3) **90**(2005), p. 167 – 208.
- [4] P. Boalch, The fifty-two icosahedral solutions to Painlevé VI, *J. Reine Angew. Math.* **596** (2006), p. 183 – 214.
- [5] P. Boalch, Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem, *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, vol. **9** (2006) p. 85 – 112.
- [6] M. Brunella, Birational Geometry of foliations, *Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004.
- [7] J. M. Couveignes, Calcul et rationalité de fonctions de Belyi, *Annales de l'institut Fourier*, tome **44**(1994), n° 1, p. 1 – 38.
- [8] J. M. Couveignes, Tools for the computation of families of covering, In "Aspects of Galois theory", *London Math. Soc. Lecture Notes Ser.*, Vol. **256**, Cambridge Univ. Press, (1999), p. 38 – 65.
- [9] C. F. Doran, Algebraic and Geometric Isomonodromic Deformations, *J. Differential Geometry* **59** (2001), p. 33 – 85.
- [10] B. Dubrovin and M. Mazzocco, Monodromy of certain Painlevé VI Transcendents and Reflection Groups, *Invent. Math.* **141** (2000), p. 55 – 147.
- [11] B. Dubrovin and M. Mazzocco, Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations, *Comm. Math. Phys.* **271**(2007),n° . 2, p. 289 – 373.
- [12] Forster and Otto, Lectures on Riemann Surfaces, New York : *Springer*, (1981).
- [13] R. Garnier, Sur des Équations Différentielles du troisième ordre dont l'intégrale Générale est Uniforme et sur une Classe d'Équations Nouvelles d'ordre Supérieur dont l'intégrale Générale a ses Points Critiques Fixes, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **29** (1912) p. 1 – 126.
- [14] R. Garnier, Étude de l'intégrale générale de l'équation VI de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularités transcendentes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 3<sup>e</sup> série, tome **34** (1917), p. 239 – 353.

- [15] R. Garnier, Sur des systèmes différentiels du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 3<sup>e</sup> série, tome **77**(1960), n° 2, p. 123 – 144.
- [16] Gareth, A. Jones and David Singerman, Complex Functions : An Algebraic and Geometric viewpoint, *Cambridge university Press*, (1987).
- [17] N. J. Hitchin, Poncelet Polygons and the Painlevé Equations, *Geometry and analysis* (Bombay, 1992), *Tata Inst. Fund. Res., Bombay*, (1995), p. 151 – 185.
- [18] N. J. Hitchin, Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations, *J. Differential Geom.* 42(1995), n° . 1, p. 30 – 112.
- [19] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme, In Schneps L., Lochak P. (Eds.), "Geometric Galois Action I", *London Math. Soc. Lecture Notes Ser.*, Vol. **242**, Cambridge Univ. Press, (1997), p. 5 – 48.
- [20] R. C. Gunning, Special Coordinate Coverings of Riemann Surfaces, *Math. Annalen* **170**(1967), p. 67 – 86.
- [21] V. Heu, Universal isomonodromic deformations of meromorphic rank 2 connections on curves, *Ann. Ins. Fourier* (Grenoble), **60**(2010), n° . 2, p. 515 – 549.
- [22] Mr. J. Hodgkinson, A detail in Conformal Representation, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, Vol. **15**(1916), p. 166 – 181.
- [23] E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, *Dover*, (1926), p. 317 – 356.
- [24] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, S. Yoshida, From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions, Braunschweig : *Vieweg*, (1991). p 169 – 229.
- [25] Jimbo and T. Miwa, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, *Physica* **2D** (1981), p.407 – 448.
- [26] A. V. Kitaev and R. Vidanus, Transformations  $RS_4^2(3)$  of the Ranks  $\leq 4$  and Algebraic Solutions of the Sixth Painlevé Equation, *Comm. Math. Phys.* **228**(2002), n° 1, p. 151 – 176.
- [27] A. Kitaev, Grothendieck's Dessin d'Enfants, Their Deformations and Algebraic Solutions of the Sixth Painlevé and Gauss Hypergeometric Equations, *Algebra i Analiz* **17**, n° . 1, (2005), p. 224 – 275; translation in *St. Petersburg Math. J.* **17**(2006), n° . 1, p. 169 – 206.
- [28] A. V. Kitaev, Remarks Towards the Classification of  $RS_4^2(3)$ –Transformations and Algebraic Solutions of the Sixth Painlevé Equation, *Sémin. Congr., 14, Soc. Math. France*, Paris, (2006), p. 199 – 227.
- [29] A. V. Kitaev, Computation of highly ramified coverings, *Math. Comp.* **78**(2009), n° . 268, p. 2371 – 2395.
- [30] A. Kitaev and R. Vidanus, Computation of RS-pullback transformations for algebraic Painlevé VI solutions. Available at <http://arxiv.org/abs/math.CA/0705.29.63>.
- [31] F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, *B. G. Teubner, Leipzig*, (1884).
- [32] S.K. Lando and A. Zvonkin, Graphs on surfaces and Their Applications, *Springer-Verlag*, (2004).
- [33] O. Lisovyy, Y. Tykhyy, Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation, Preprint <http://arxiv.org/abs/0809.4873> (2008).
- [34] F. Loray, Painlevé VI Équation And the Riemann-Hilbert Correspondance, non publié.

- [35] F. Loray, Okamoto symmetry of Painlevé VI equation and isomonodromic deformation of Lamé connections, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B2* (2007) p.129 – 136.
- [36] F. Loray and D. Marin, Projective Structures and Projective Bundles over compact Riemann Surfaces, *Astérisque* (2009), n° . 323, p. 223 – 252.
- [37] F. Loray and J.V. Pereira, Transversely projective foliations on surfaces : existence of minimal form and prescription of monodromy, *Intern. Jour. Math.* **18** (2007) p. 723 – 747.
- [38] F. X. Machu, Monodromy of a class of Logarithmic Connections on an Elliptic Curve, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, *SIGMA* **3**(2007), 082, 31 pages.
- [39] M. Nagata, On self-intersection number of a section on a ruled surface, *Nagoya Math. J.* **37** (1970), p. 191 – 196.
- [40] F. Pakovich, Solution of the Hurwitz problem for Laurent polynomials, *J. Knot Theory Ramifications* **18**(2009), n° . 2, p. 271 – 302.
- [41] H. Poincaré, Sur les groupes des équations linéaires, *Acta Math.* **4**(1884), p. 201 – 312.
- [42] H. P. de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*, ENS Éditions École normale supérieure de Lyon (2011) 544 pages.
- [43] L. Schlesinger. Ueber eine Klasse von Differential System Beliebiger Ordnung mit Festen Kritischer Punkten, *J. fur Math.*, **141**(1912), p. 96 – 145.
- [44] L. Shneps, Desins d’Enfant on the Riemann sphere, In ”Grothendieck theory of Dessins d’Enfant”, *London Math. Soc. Lecture Notes Ser.*, Vol. **200**, Cambridge Univ. Press, (1994); p. 38 – 65.
- [45] R. Vidunas, Algebraic Transformations of Gauss hypergeometric Functions, *Funkcial. Ekvac.* **52**(2009), n° . 2, p. 139 – 180
- [46] R. Vidunas, Transformations of some Gauss hypergeometric Functions, *J. Comp. Appl. Math.* **178** (2005), p. 473 – 487.
- [47] H. Watanabe, Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **27**, (1999), p.379 – 425.



# Résumé

Le système de Garnier de rang  $N$  est un système d'équations différentielles non linéaires. Ses solutions locales, de dimension  $N$ , paramétrisent les déformations isomonodromiques d'équations différentielles scalaires d'ordre 2 sur la sphère de Riemann avec  $2N + 3$  singularités fuchsiennes ( $N + 3$  points singuliers essentiels et  $N$  points singuliers apparents). Ces solutions sont en générales très transcendentes, mais il possède aussi des solutions algébriques. Ces dernières apparaissent par exemple lorsque l'on déforme une équation scalaire à monodromie finie, ou pour certaines monodromies réductibles. On peut aussi construire des déformations isomonodromiques algébriques en tirant en arrière une équation fuchsienne fixée par une famille à  $N$  paramètres de revêtements ramifiés : c'est la méthode utilisée par Kitaev dans le cas  $N = 1$ , i.e. pour l'équation de Painlevé VI. Nous classifions toutes les solutions algébriques obtenues par cette méthode pour  $N$  arbitraire, dont la monodromie n'est pas élémentaire (en particulier irréductible et infinie). Il n'y en a pas pour  $N$  supérieur ou égal à 4. Certaines de ces solutions sont calculées explicitement dans la dernière section. La méthode de Kitaev permet de construire des solutions algébriques incomplètes pour tout  $N$  (c'est à dire de dimension plus petite que  $N$ , la solution complète n'étant pas nécessairement algébrique) et aussi en genre quelconque. Dans le cas des connexions holomorphes de rang 2 sur les courbes de genre 2, nous classifions les déformations algébriques non élémentaires obtenue par cette méthode : elles sont toutes incomplètes, de dimension 1. Toujours dans ce cadre, nous étudions une famille de dimension 4 déformations à 2 paramètres obtenues à partir de solutions de systèmes de Garnier de rang  $N = 2$ . Cette famille, qui apparait sur les courbes bi-elliptiques, est caractérisée en termes de monodromie.



# ABSTRACT

Garnier system of rank  $N$  is a system of nonlinear differential equations. Local solutions of dimension  $N$ , parameterize the isomonodromic deformations of scalar differential equations of order 2 on the Riemann sphere with  $2N + 3$  Fuchsian singularities ( $N + 3$  essential singular points and  $N$  singularities apparent). These solutions are in general very transcendent, but it also has algebraic solutions. They appear for example when a deformed scalar equation in finite monodromy, or for certain reducible monodromy. One can also construct algebraic isomonodromic deformations by pulling back a Fuchsian equation determined by a family of  $N$  parameters branched coverings : the method used by Kitaev in the case  $N = 1$ , ie for the equation of Painlevé VI. We classify all algebraic solutions obtained by this method for arbitrary  $N$ , the monodromy is not elementary (in particular irreducible and infinite). There is not for  $N$  greater than or equal to 4. Some of these solutions are calculated explicitly in the final section. Kitaev's method allows the construction of incomplete algebraic solutions for any  $N$  (ie of dimension smaller than  $N$ , the solution is not necessarily algebraic) and also any genus. In the case of holomorphic connections of rank 2 on curves of genus 2, we classify non-elementary algebra deformations obtained by this method : they are all incomplete in one dimension. Also in this context, we study a family of four dimension 2-parameter deformations obtained from solutions of Garnier systems of rank  $N = 2$ . This family, which appears on bi-elliptic curves, is characterized in terms of monodromy.